

Sistemas de controle

Princípios e métodos de projeto

Alexandre Sanfelice Bazanella
João Manoel Gomes da Silva Jr.

Dedicatória

Para Adriane e Silvia

Sumário

	Introdução	9
1	Conceitos de base	13
	1.1 Introdução	13
	1.2 Estratégias de controle	15
	1.3 Sistemas realimentados	19
	1.4 Ações básicas de controle	32
	1.5 Implementação de controladores	38
	1.6 Exercícios	43
2	O controlador PID	49
	2.1 Introdução	49
	2.2 A banda proporcional	51
	2.3 O controlador proporcional	52
	2.4 O controlador proporcional-integral	55
	2.5 O controlador proporcional-derivativo	57
	2.6 O controlador proporcional-integral-derivativo	60
	2.7 Implementação analógica	62
	2.8 Implementação digital	66
3	Ajuste de controladores PID	71
	3.1 Introdução	71
	3.2 Método da resposta ao salto	73
	3.3 Método do ponto crítico	82
	3.4 Conclusão	90
	3.5 Exercícios	91
4	Modelagem de processos	97
	4.1 Introdução	97
	4.2 Modelos de processos	99
	4.3 Linearização de modelos não-lineares	107

	4.4	Identificação de parâmetros	111
	4.5	Exercícios	124
5		Alocação de pólos	133
	5.1	Introdução	133
	5.2	A equação diofantina	135
	5.3	Método do lugar das raízes	144
	5.4	Ajuste pelo lugar das raízes	158
	5.5	Exercícios	169
6		Resposta em frequência	175
	6.1	Fundamentos	175
	6.2	Especificações no domínio da frequência	184
	6.3	Projeto de controladores em avanço e em atraso	188
	6.4	Controladores em avanço	203
	6.5	Projeto de controladores PID	213
	6.6	Exercícios	226
7		Aspectos não-lineares	231
	7.1	Introdução	231
	7.2	Comportamento não-linear	232
	7.3	Saturação de atuadores	238
	7.4	Compensação de efeitos não-lineares	249
	7.5	Zona-morta	256
	7.6	Programação de ganhos	260
	7.7	Exercícios	265
		Referências	267
A		Representação de sistemas dinâmicos	269
	A.1	Sistemas lineares e invariantes no tempo	269
	A.2	Funções de transferência	270
	A.3	Sistemas de 1 ^a ordem	273
	A.4	Sistemas de 2 ^a ordem	275
	A.5	Sistemas de ordem superior	283
	A.6	Sistemas de fase não-mínima	290
	A.7	Resposta a entradas senoidais	291
B		Processos exemplos	295
	B.1	Processo térmico	295
	B.2	Controle de nível	297

Introdução

O material exposto neste livro é fruto da experiência dos autores em ensino na UFRGS ao longo de 10 anos - entre 1996 e 2005. Nesse período, os autores foram responsáveis por várias disciplinas de graduação e pós-graduação da área de sistemas de controle do Departamento de Engenharia Elétrica da UFRGS, bem como por cursos de extensão e projetos de pesquisa.

Este livro foi escrito com o propósito de apresentar os conceitos básicos da operação e implementação de sistemas de controle e os principais métodos de *projeto* de controladores monovariáveis. O projeto de sistemas de controle faz intenso uso da teoria de sistemas e sinais e, portanto, essa teoria é aqui utilizada em sua plenitude, sendo toda a apresentação do livro fundamentada firmemente nesses conceitos teóricos. Entretanto, não é objetivo do livro apresentar ou discutir estes conceitos em si, embora eles sejam brevemente revisados ao longo dos diversos capítulos, a fim de tornar o livro autocontido. Os conceitos teóricos de sistemas e sinais aparecem aqui como ferramenta para a finalidade desejada, e familiaridade com esses conceitos é fundamental para a leitura. A teoria de sistemas e sinais, inclusive sistemas realimentados, é tópico de disciplinas básicas dos cursos de engenharia que incluem sistemas de controle em seus currículos, e podem ser encontrados em vários textos de alta qualidade utilizados para seu ensino, tais como Geromel; Palhares (2004) e Haykin; Veen (2001), entre outros.

No Capítulo 1, são apresentados os conceitos fundamentais de sistemas de controle. O problema de controle é colocado e contextualizado, introduzindo os objetivos de um sistema de controle, suas características básicas mais relevantes, os problemas mais importantes a

serem considerados em seu projeto e noções sobre sua implementação.

Controladores de estrutura simples e padronizada, como os controladores PID, representam a imensa maioria das malhas de controle industriais em todo o mundo (mais de 90% segundo autores como Åström; Hägglund (1995)). Apesar disso a maior parte dos textos em sistemas de controle dedicam espaços modestos ao estudo específico dessa classe de controladores. Evidentemente, os controladores PID estão sujeitos às mesmas leis de controladores genéricos, portanto os métodos genéricos apresentados na literatura de controle clássico se aplicam também a eles. Porém, explorando as especificidades desses controladores com estrutura fixa, muitas vezes é possível realizar seu projeto de forma mais simples e eficiente. Isso é tanto mais verdade em aplicações em que os requisitos de desempenho são modestos, o que é bastante comum na prática profissional. Por essa razão, este livro dedica espaço considerável ao tratamento de controladores PID. No Capítulo 2, são apresentados os conceitos básicos em controle PID, inclusive aspectos elementares de sua implementação. Em muitos casos, um ajuste satisfatório de um controlador PID pode ser obtido sem conhecimento de um modelo matemático para o processo, a partir de um experimento simples sobre o processo. Essa classe de métodos de ajuste, de grande relevância na prática industrial e raramente destacada na literatura, é apresentada no Capítulo 3.

Métodos mais poderosos e genéricos de projeto de controladores são apresentados em seguida. Esses métodos, os quais se convencionou chamar de *controle clássico*, exigem o conhecimento de um modelo matemático para o processo a ser controlado. Logo, o projeto de um sistema de controle por esses métodos passa necessariamente pela obtenção de um modelo. No Capítulo 4, apresentamos os princípios básicos cujo conhecimento é necessário para a realização desse procedimento. A aplicação desses conceitos à obtenção de modelos para algumas classes de processos muito comuns na indústria é também apresentada. Procedimentos de identificação são discutidos e exemplificados ao final do capítulo. O tratamento dado ao problema de modelagem e identificação de sistemas é breve e visa fornecer tão-somente os elementos básicos para a prática profissional e um entendimento melhor motivado e fundamentado dos métodos clássicos de projeto, apresentados nos capítulos subsequentes. Um tratamento detalhado

desse problema pode ser encontrado nos textos de Aguirre (2004) e Geromel; Palhares (2004).

Em função do tipo de modelo obtido, diferentes abordagens podem ser aplicadas ao projeto do controlador. A partir de um modelo paramétrico (função de transferência), a abordagem mais comum e possivelmente a mais poderosa ao problema de projeto consiste em escolher posições adequadas para os pólos de laço fechado do sistema. Adotamos para essa abordagem a denominação genérica de projeto por *alocação de pólos*, que engloba os métodos apresentados no Capítulo 5: o clássico método do lugar das raízes e a alocação completa de pólos - resolvida pela equação diofantina. Modelos freqüenciais (não paramétricos) se apresentam na forma de um diagrama, dos quais o mais comumente utilizado é o diagrama de Bode. Então o projeto é abordado graficamente, buscando alterar de maneira conveniente o formato do diagrama de resposta em freqüência. Essa abordagem é apresentada no Capítulo 6. Os métodos clássicos - lugar das raízes e resposta em freqüência - recebem tratamento destacado devido à sua extrema relevância na teoria e prática de sistemas de controle, relevância essa oriunda principalmente de sua firme fundamentação teórica, seu forte apelo intuitivo e várias décadas de aplicação.

Componentes não-lineares surgem em virtualmente todos os sistemas de controle. O tratamento do comportamento não-linear é, portanto, fundamental à concepção de um sistema de controle real e, mais ainda, à compreensão de muitos fenômenos envolvidos em sua operação. Os fenômenos e questões mais relevantes do ponto de vista prático relativas ao comportamento não-linear dos sistemas de controle são apresentados no Capítulo 7.

Sistemas de controle

Capítulo 1

Conceitos de base

1.1 Introdução

Um sistema de controle pode ser representado esquematicamente conforme a Figura 1.1.

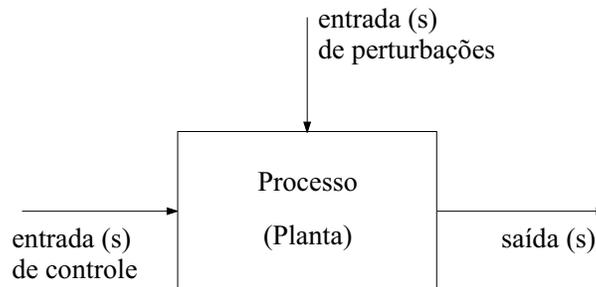


Figura 1.1 - Sistema de controle

O sistema a ser controlado é chamado de *processo* ou *planta*. O sinal aplicado na(s) entrada(s) de controle é chamado de *signal de controle* ou *variável manipulada* (MV), pois seu valor pode ser manipulado. O sinal de saída do processo é chamado de *variável controlada* ou *variável de processo* (PV), e é a variável cujo comportamento se deseja controlar. Além disso, o sistema controlado está, em geral, sujeito à ação de sinais exógenos chamados de *perturbações*, que são sinais de

entrada cujos valores não podem ser manipulados.

O objetivo de um sistema de controle consiste em aplicar sinais adequados na entrada de controle a fim de fazer com que o sinal de saída apresente um comportamento pré-especificado, e que o efeito da ação das perturbações sobre este comportamento seja minimizado ou mesmo completamente eliminado. O problema de controle consiste então em determinar, a partir do comportamento desejado para a saída e do conhecimento do processo, os sinais adequados a serem aplicados na entrada de controle.

Exemplo 1.1 Considere o controle de temperatura de um forno. O forno e a carga em seu interior (material a ser aquecido) constitui-se no processo a ser controlado. A variável controlada (sinal de saída) é a temperatura no interior do forno. A entrada do processo é a quantidade de calor fornecida ou retirada do forno através do elemento aquecedor (resistência elétrica, queimadores a gás, etc.) e do elemento resfriador (sistema de ventilação ou resfriamento). Como perturbação externa tem-se a variação da temperatura ambiente. Um objetivo nesse caso é fazer com que a saída do processo assuma um valor constante (valor de referência) e que, mesmo quando a temperatura ambiente varie, a temperatura no interior do forno, após um determinado tempo, volte ao valor de referência especificado. Para tanto, a cada instante de tempo é necessário fornecer ou retirar do forno quantidades bem determinadas de calor. Um objetivo um pouco mais complexo, muito usado quando se deseja fazer tratamento térmico em peças, seria o de fazer com que a temperatura no interior do forno seguisse um determinado perfil de temperatura.

O objetivo deste capítulo é apresentar os conceitos básicos de sistemas de controle que são de fundamental importância para a análise crítica e para o projeto de controladores de uma maneira geral.

1.2 Estratégias de controle

A partir da forma como o sinal de controle é determinado, podemos classificar a estratégia de controle como *em malha aberta* ou *em malha fechada*.

1.2.1 Controle em malha aberta

O controle em malha aberta consiste em aplicar um sinal de controle predeterminado, esperando-se que, ao final de um certo tempo, a variável controlada atinja um determinado valor ou apresente um determinado comportamento. Neste tipo de sistema de controle não são utilizadas informações sobre a evolução do processo para determinar o sinal de controle a ser aplicado a cada instante. Ao contrário, o sinal de controle é predefinido, sem que seja feita medição do sinal de saída.

Exemplo 1.2 Imagine um automóvel sem velocímetro. Deseja-se manter a velocidade constante em um determinado valor: 80 Km/h, por exemplo. O motorista estima então, a partir de sua experiência em conduzir o veículo, com qual pressão ele deverá pisar no acelerador e mantém o acelerador com esta pressão. Dependendo da experiência do motorista e de outras condições de viagem, tais como a carga do veículo e o terreno, a velocidade final poderá ser mantida próxima a 80 Km/h, porém não exatamente neste valor. Por outro lado, se o automóvel for submetido à ação de um vento frontal (por trás), a velocidade irá diminuir (aumentar) e o motorista não poderá fazer correções em sua ação de controle pré-calculada para corrigir estas variações de velocidade.

Exemplo 1.3 O processo de lavagem de roupa em máquinas de lavar convencionais constitui-se em um sistema de controle em malha aberta. O usuário pré-escolhe o “programa de lavagem” e, ao final da execução

do mesmo, assume-se que a roupa estará limpa. Note que não é feita nenhuma “medida da sujeira” durante a lavagem. Assim, se a roupa estiver extremamente suja, pode ser que o programa escolhido (temperatura, tempo, quantidade de sabão) não seja suficiente para limpá-la convenientemente. Por outro lado, se a roupa não estiver tão suja, provavelmente estaremos desperdiçando energia.

Os exemplos ilustram as características básicas de um sistema de controle que opera em malha aberta: sinal de controle predeterminado, imprecisão, nenhuma adaptação a variações externas (perturbações). Por outro lado, esse tipo de sistema é, em geral, simples e barato, pois não envolve equipamentos para a medição e/ou determinação do sinal de controle.

1.2.2 Controle em malha fechada

No controle em malha fechada, informações sobre como a saída do processo está evoluindo são utilizadas para determinar o sinal de controle que deve ser aplicado ao processo a cada instante de tempo. Isso é feito a partir da medição do sinal de saída através de um *sensor* que irá converter a grandeza física a ser controlada em um sinal, em geral, elétrico. A fim de tornar o sistema mais preciso e de fazer com que ele reaja a perturbações externas, o sinal de saída é então comparado com um sinal de referência (chamado no jargão industrial de *set-point*) e a diferença entre esses dois sinais, chamada de *sinal de erro*, é utilizada para determinar o sinal de controle que deve efetivamente ser aplicado ao processo. Assim, o sinal de controle é determinado de forma a corrigir este desvio entre a saída e o sinal de referência. A este processo que envolve a medida do sinal de saída e sua comparação com o sinal de referência dá-se o nome de *realimentação*. O dispositivo que utiliza o sinal de erro para determinar ou calcular o sinal de controle a ser aplicado à planta é chamado de *controlador* ou *compensador*. O diagrama básico de um sistema de controle em malha fechada é mostrado na Figura 1.2.

Em geral, o sinal proveniente do controlador é um sinal elétrico de baixa potência, não podendo ser aplicado diretamente ao processo.

Capítulo 1 Conceitos de base

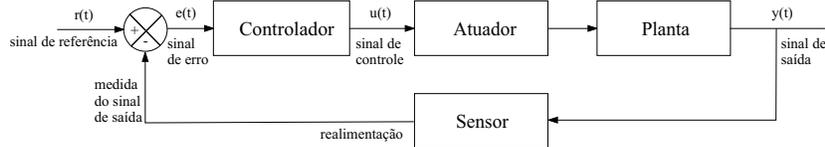


Figura 1.2 - Controle em malha fechada

Se faz necessário então a introdução de um elemento intermediário, chamado de *atuador*, responsável pela conversão desse sinal elétrico na grandeza física de entrada do processo. Como exemplos de atuadores podemos citar: válvulas proporcionais (convertem o sinal elétrico em uma vazão), resistências de aquecimento (convertem um sinal elétrico em calor), circuitos de acionamento de motores (*drivers* de potência).

Para ilustrar os conceitos expostos, a seguir são apresentados dois exemplos de sistemas de controle em malha fechada.

Exemplo 1.4 Considere o mesmo exemplo do automóvel. Suponha agora que o carro possui um velocímetro. O motorista pode então monitorar a velocidade e variar a pressão com que ele pisa no acelerador de forma a manter a velocidade no valor desejado. Se a velocidade ultrapassa o valor desejado, o motorista reduz a pressão sobre o acelerador; se, ao contrário, a velocidade cair abaixo do valor desejado, ele aumenta a pressão sobre o acelerador. Dessa forma pode ser compensado também o efeito de perturbações, tais como a ação de rajadas de vento. Nesse caso, o sensor são os olhos do motorista, o controlador é seu cérebro e o atuador é o motor do automóvel.

Exemplo 1.5 Considere o controle da temperatura de um forno. Suponha que a temperatura interna do forno seja medida e o seu valor seja comparado com o valor desejado (referência de temperatura). Se a temperatura dentro do forno é menor que a referência, então aplica-se ao forno uma potência que será função desta diferença. Nesse sentido, a temperatura dentro do forno tenderá a crescer, diminuindo a diferença com relação à referência. No caso do erro ser negativo (temperatura do forno maior que o valor de referência), seria acionado um sistema de resfriamento do forno com potência proporcional a este erro, ou simplesmente seria desligado o aquecimento do mesmo. Dessa maneira, a temperatura do forno tenderia sempre a se acomodar no valor de referência ou em um valor muito próximo desta, garantindo ao sistema de controle uma boa *precisão*. Além disso, variações da temperatura externa (que fariam variar a temperatura dentro do forno) seriam compensadas pelo efeito da realimentação, garantindo ao sistema *capacidade de rejeição a perturbações externas*.

Em resumo, a utilização da realimentação e, portanto, do controle em malha fechada, permite:

- aumentar a precisão do sistema de controle com relação ao controle em malha aberta;
- rejeitar o efeito de perturbações sobre a variável de processo;
- diminuir a sensibilidade do comportamento do sistema a variações dos parâmetros do processo, ou seja, tornar o sistema *robusto*.

Cabe ressaltar aqui que o *controle por operador*, bastante usual na prática, é erroneamente interpretado como controle em malha aberta, quando na verdade trata-se de um controle em malha fechada. A partir das informações fornecidas pelos sensores ou por sua própria observação, o operador percebe o que está acontecendo com o processo e, a partir de sua experiência, decide qual o valor do sinal de controle

que deve ser aplicado a fim de que certas especificações sejam atingidas. Nesse caso, o operador fecha a malha de realimentação, fazendo assim o papel do controlador.

1.3 Sistemas realimentados

No estudo de sistemas realimentados, assim como no estudo de sistemas dinâmicos em geral, os sistemas são descritos por modelos matemáticos que podem assumir diferentes formas. A obtenção de modelos matemáticos e considerações teóricas sobre sua validade são apresentadas no Capítulo 4 e no Apêndice A. Sistemas lineares e invariantes no tempo (LIT) podem ser representados por funções de transferência, e esta representação é adotada a seguir.

Considerando o sistema realimentado apresentado na Figura 1.2, pode-se representá-lo pelo diagrama em blocos da Figura 1.3, onde:

- $G(s)$, $H(s)$ e $C(s)$ correspondem respectivamente às funções de transferência do processo, do sensor e do controlador. Cabe ressaltar que a função de transferência do atuador está implicitamente considerada em $G(s)$. Muitas vezes o comportamento do sensor, por ter uma dinâmica muito mais rápida do que a do processo, pode ser aproximado por um simples ganho, isto é, $H(s)$ é igual a uma constante. No caso em que $H(s) = 1$, diz-se que o sistema possui *realimentação unitária*.
- $r(s)$, $e(s)$ e $u(s)$ correspondem respectivamente às transformadas de Laplace dos sinais de referência, erro e controle.

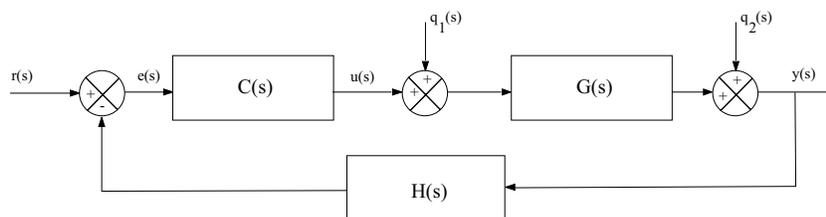


Figura 1.3 - Sistema realimentado

- $q_1(s)$ e $q_2(s)$ correspondem a perturbações agindo respectivamente na entrada e na saída do processo; não necessariamente ambas estarão presentes.

1.3.1 Função de transferência em malha fechada

Seja o diagrama em blocos da Figura 1.3. A partir desse diagrama tem-se que:¹

$$y(s) = C(s)G(s)e(s) = C(s)G(s)(r(s) - H(s)y(s))$$

onde pode-se deduzir, isolando $y(s)$ na equação, que a função de transferência entre a entrada de referência $r(s)$ e a saída do processo $y(s)$ é dada por

$$T(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)H(s)}$$

A função de transferência $T(s)$ é denominada *função de transferência em malha fechada*, enquanto $C(s)G(s)H(s)$ é chamada de *função de transferência de laço*.

Seguindo um raciocínio análogo, temos que as funções de transferência entre as entradas de perturbações e a saída do sistema são dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned} T_{q_1}(s) &= \frac{y(s)}{q_1(s)} = \frac{G(s)}{1 + C(s)G(s)H(s)} \\ T_{q_2}(s) &= \frac{y(s)}{q_2(s)} = \frac{1}{1 + C(s)G(s)H(s)} \end{aligned}$$

Note que $T(s)$, $T_{q_1}(s)$ e $T_{q_2}(s)$ possuem os mesmos pólos, que se constituem nas raízes (zeros) da equação $1 + C(s)G(s)H(s) = 0$, também chamada de *equação característica*.

Será visto nas seções seguintes que a estabilidade e as características de desempenho do sistema são determinadas a partir dos pólos e zeros das funções de transferência apresentadas. Como $G(s)$ e $H(s)$ são fixas, ou seja, não são em geral alteráveis por parte do engenheiro de controle, a garantia de estabilidade do sistema de controle

¹Não confundir: $e(s)$ - transformada de Laplace de $e(t)$ com e - algarismo neperiano em $e^{-Ts} = \exp(-Ts)$.

em malha fechada e satisfação de requisitos de desempenho se dará pelo projeto criterioso de $C(s)$.

1.3.2 Realimentação unitária

Conforme dito na seção anterior, em geral $H(s)$ pode ser considerada apenas como um ganho, ou seja, a dinâmica do sensor ou do condicionador de sinal é muito mais rápida que a do processo e, portanto, pode ser desprezada. Na prática, na grande maioria das vezes o ganho do sensor é diferente de 1 e, na verdade, o sinal de referência para a variável de saída é convertido em um sinal elétrico proporcional a este. Esse fator de proporcionalidade deve então ser igual ao ganho do sensor, permitindo assim que o sinal de saída possa ser convenientemente comparado com o sinal de referência a fim de gerar o sinal de erro.

Exemplo 1.6 Seja o controle da velocidade de um motor elétrico por um acionamento eletrônico. Utiliza-se um sensor cujo ganho é de $10 \frac{\text{mV}}{\text{rpm}}$. Assim, quando ajustarmos no *display* do controlador uma referência de 1500 rpm, o valor que será usado internamente como referência pelo sistema eletrônico, a fim de ser comparado com o sinal proveniente do sensor, será igual a $1500 \text{ rpm} \times 10 \frac{\text{mV}}{\text{rpm}} = 15 \text{ V}$.

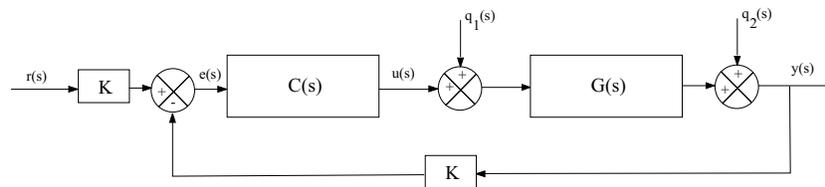


Figura 1.4 - Realimentação não-unitária

Considerando genericamente $H(s) = K$, temos então o diagrama em blocos apresentado na Figura 1.4. Observe que a unidade da

grandeza da referência corresponde àquela da variável controlada (rpm, por exemplo), enquanto a variável de comparação será dada por uma grandeza que, em geral, é elétrica. A fim de manter a proporcionalidade entre os sinais, o sinal de referência deve ser multiplicado pelo mesmo fator de ganho proporcionado pelo sensor.

Do diagrama em blocos da Figura 1.4 segue que:

$$u(s) = C(s)[Kr(s) - Ky(s)] = KC(s)(r(s) - y(s)) \quad (1.1)$$

ou seja, o diagrama em blocos da Figura 1.4 é equivalente ao diagrama da Figura 1.5.

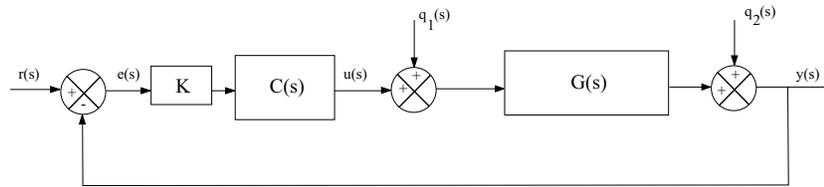


Figura 1.5 - Realimentação unitária

Conclui-se então que quando $H(s)$ é um simples ganho, o sistema em malha fechada é equivalente a um sistema com realimentação unitária, onde o ganho do sensor é considerado no caminho direto entre o sinal de referência e a saída do processo. Assim sendo, não há perda de generalidade em se considerar a realimentação unitária no estudo de sistemas de controle.

1.3.3 Estabilidade de sistemas realimentados

Para os desenvolvimentos apresentados neste livro, adotaremos a definição de estabilidade fornecida pelo conceito de BIBO-estabilidade (*bounded-input-bounded-output*). Um sistema é dito BIBO-estável se, para qualquer sinal de amplitude limitada aplicado em sua entrada, o sinal de saída é também limitado. Por outro lado, se existir pelo menos um sinal de amplitude limitada que, ao ser aplicado à sua entrada, dá origem a um sinal de saída que diverge indefinidamente com o passar do tempo, então o sistema não é BIBO-estável (Haykin; Veen (2001)).

Capítulo 1 Conceitos de base

Considerando-se sistemas lineares, a BIBO-estabilidade é determinada pelos pólos da função de transferência entre o sinal de entrada e a saída do sistema, ou seja:

- processo - a estabilidade é determinada pelos pólos da $G(s)$;
- sistema em malha fechada - a estabilidade é determinada pelos zeros da equação característica $(1 + C(s)G(s)H(s))$, ou equivalentemente, pólos de $T(s)$, $T_{q1}(s)$ ou $T_{q2}(s)$.

Um requisito elementar necessário para a operação de um sistema de controle é que ele deve ser BIBO-estável. Note que um sistema em que todos os componentes da malha de realimentação (processo, sensor, atuador e controlador) são estáveis pode vir a tornar-se instável ao fecharmos a malha e vice-versa.

De acordo com o sinal da parte real dos pólos, isto é, sua localização no semiplano esquerdo (SPE), semiplano direito (SPD) ou sobre o eixo imaginário do plano complexo, temos os seguintes comportamentos:

- BIBO-estável - todos os pólos do sistema têm parte real negativa, isto é, todos os pólos devem estar no SPE;
- instável - se o sistema possuir ao menos 1 pólo com parte real positiva, ou seja, pelo menos um pólo no SPD;
- marginalmente estável - se todos os pólos do sistema têm parte real não-positiva (negativa ou nula).

A partir do que foi exposto, se aplicarmos um sinal do tipo salto (sinal constante) na entrada de um sistema linear estável, sua saída tenderá a um valor constante após passado um período transitório. As Figuras 1.6 e 1.7 mostram a resposta de dois sistemas a uma entrada do tipo salto unitário. Note que a resposta apresentada na Figura 1.6 é limitada em amplitude, pois este sistema é estável. Já o sistema da Figura 1.7 apresenta uma resposta divergente sendo, portanto, instável.

Cabe aqui ressaltar que a estabilidade de um sistema linear é uma característica do sistema, ou seja, independe do sinal de entrada considerado.

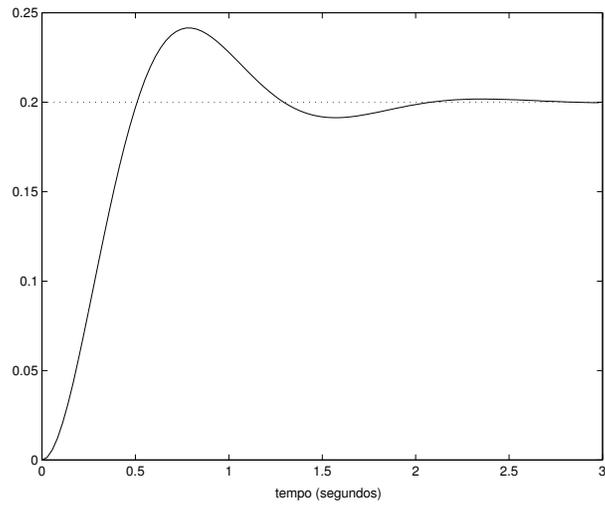


Figura 1.6 - Comportamento estável

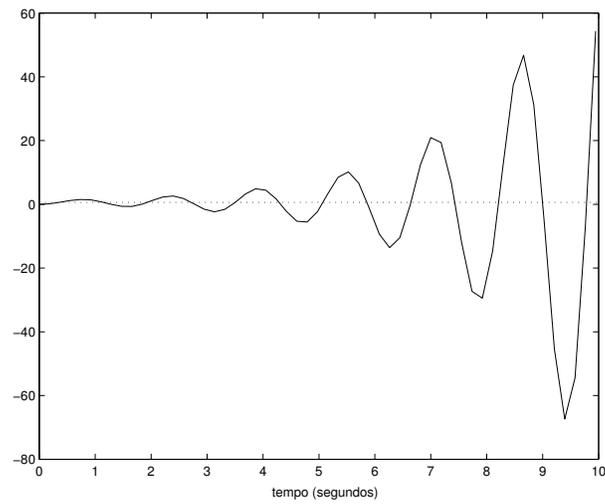


Figura 1.7 - Comportamento instável

1.3.4 Desempenho de sistemas realimentados

O desempenho de um sistema de controle pode ser analisado em termos da resposta temporal do sistema a uma dada entrada. A fim de podermos facilmente comparar o desempenho de 2 sistemas, as especificações de desempenho são definidas em função da resposta a certas entradas padrão, tais como o salto e a rampa unitários. A resposta de um sistema estável à aplicação de uma dada entrada pode ser dividida em duas partes: a resposta transitória e a resposta em regime permanente. A resposta transitória é um período de tempo que decorre logo após a aplicação de uma nova entrada ao sistema em que se dão grandes variações na saída do processo. É o tempo que o sistema demora para se acomodar (ou reagir) à nova entrada. Por outro lado, a resposta em regime permanente caracteriza o comportamento da saída do sistema um longo tempo após a aplicação de um dado sinal de entrada.

1.3.4.1 Desempenho em regime transitório

O desempenho em regime transitório de um sistema é avaliado, em geral, pela resposta temporal do sistema a uma entrada do tipo salto. Uma resposta típica a um salto unitário (referência constante) é apresentada na Figura 1.8. O desempenho do sistema é medido pelo valor das grandezas descritas a seguir.

- *Máximo sobrepasso* (M_o) - supondo que o valor da saída ultrapasse seu valor de regime permanente $y(\infty)$, o máximo sobrepasso é definido como a máxima diferença entre a saída e $y(\infty)$ durante o período transitório, ou seja, o valor de pico máximo atingido pela resposta. Se a saída não ultrapassa o valor de regime permanente, o sobrepasso máximo é, por definição, igual a zero. O sobrepasso máximo é, em geral, dado em porcentagem:

$$M_o\% = \frac{M_o - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100$$

Em muitas aplicações, o sobrepasso é altamente indesejável e em todos os casos sobrepassos muito grandes são inaceitáveis. Por

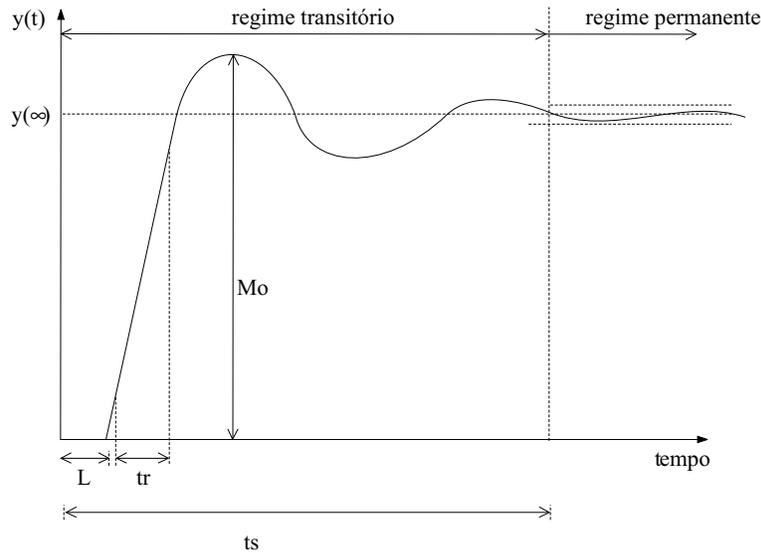


Figura 1.8 - Desempenho em regime transitório

essa razão, o máximo sobrepasso é uma medida muito importante do desempenho de um sistema de controle. Além disso, o máximo sobrepasso é também um indicativo da estabilidade relativa do sistema. Quanto maior seu valor, menor a estabilidade relativa, isto é, mais próximo o sistema estará de apresentar um comportamento instável.

- *Tempo de subida (t_r)* - é definido como o tempo transcorrido para a resposta ir de 10% a 90% do seu valor final. O tempo de subida é um indicativo de quão rápido reage o sistema à aplicação de um salto em sua entrada. Muitas vezes a redução excessiva do tempo de subida de um sistema, a partir da sintonia dos parâmetros de um controlador, pode provocar o aparecimento de um alto sobrepasso. Isso ocorre pelo fato que o sistema foi “acelerado” de tal maneira que se torna difícil “freá-lo”, o que leva a saída a ultrapassar de maneira significativa o valor da entrada.

Capítulo 1 Conceitos de base

- *Tempo de acomodação* (t_s) - é o tempo necessário para que a resposta entre e permaneça dentro de uma faixa percentual (2% ou 5%) em torno do valor de regime permanente.
- *Atraso de transporte* (L) - é o tempo decorrente para que uma variação no sinal de entrada do sistema seja efetivamente observada na variável de processo. Assim, se aplicarmos, por exemplo, uma entrada do tipo salto em um processo com atraso de transporte, e a saída do processo permanecer inalterada durante um intervalo de tempo T , este tempo T é o atraso de transporte. Entre as causas de ocorrência do atraso de transporte podemos citar: atraso na medida da variável de processo, ou seja, tempo que o sensor leva para sentir que houve efetivamente uma variação, atraso na operação do atuador e atraso na ação do próprio controlador. Em geral, quanto maior o atraso de transporte, mais difícil é o controle do processo.

1.3.4.2 Desempenho em regime permanente

O desempenho em regime permanente é medido a partir da capacidade de um sistema seguir referências padrões (salto, rampa, parábola) e rejeitar assintoticamente sinais de perturbação também padrões.

A ferramenta matemática utilizada na análise do regime permanente é o *teorema do valor final* (Haykin; Veen (2001); Geromel; Palhares (2004); Franklin; Powell; Naeini (1994)). Sejam $r(s)$ a entrada aplicada ao sistema e $T(s)$ a função de transferência entre y e r . De acordo com o teorema do valor final, se $T(s)$ e $r(s)$ possuem todos os seus pólos com parte real não positiva, então o valor da saída do sistema quando $t \rightarrow \infty$ (valor da saída em regime permanente) é dado por:

$$y(\infty) \triangleq \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sr(s)T(s)$$

Considere o sistema com realimentação unitária da Figura 1.9. Nesse sistema estamos interessados nos efeitos, em regime permanente, sobre a saída do sistema do sinal $r(s)$ (referência) e da perturbação $q(s)$. Pelo princípio da superposição temos que:

$$y(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}r(s) + \frac{G(s)}{1 + C(s)G(s)}q(s)$$

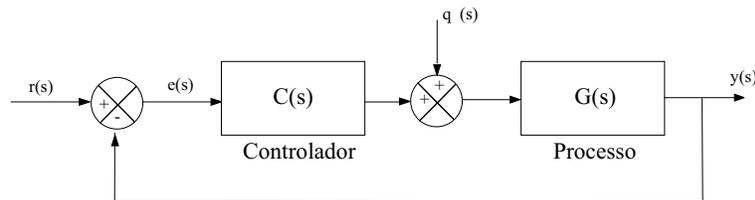


Figura 1.9 - Sistema realimentado

ou seja,

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} r(s) + \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{G(s)}{1 + C(s)G(s)} q(s) \quad (1.2)$$

Seguimento de referência

Em sistemas de controle em malha fechada, é desejável que a saída do sistema em regime permanente seja igualada ao sinal de referência (entrada). Entretanto, em alguns casos essa igualdade não é atingida e temos o que chamamos de *erro em regime permanente*:

$$e(\infty) = r(\infty) - y(\infty)$$

Exemplo 1.7 Considere o diagrama em blocos da Figura 1.9 com $q(t)=0$. Os gráficos da Figura 1.10 mostram a resposta deste sistema a um salto unitário considerando

- a) $C(s) = 1$ e $G(s) = \frac{1}{(s+2)}$
- b) $C(s) = \frac{1}{s}$ e $G(s) = \frac{1}{(s+2)}$

Observe que para, o caso a, o sistema apresenta um erro em regime permanente igual a 0,66, enquanto no caso b esse erro é nulo, ou seja, a saída iguala o valor da referência em regime permanente.

Capítulo 1 Conceitos de base

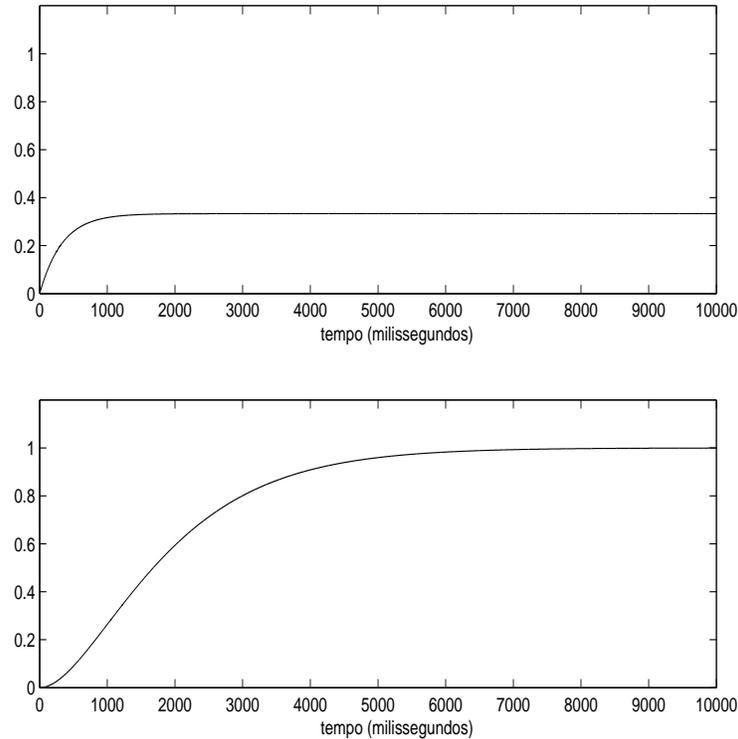


Figura 1.10 - Seguimento de referência

A partir do teorema do valor final, pode-se estabelecer as seguintes conclusões (Ogatta (1993); Franklin; Powell; Naeini (1994)).

- Para que um sistema siga, com erro nulo em regime permanente, uma entrada de referência do tipo salto (constante): a função de transferência de laço ($C(s)G(s)$) deve ser no mínimo do tipo 1, ou seja, possuir ao menos 1 pólo na origem.² Se essa função for do tipo 0, teremos um erro finito em regime permanente.
- Para que um sistema siga, com erro nulo em regime permanente, uma entrada de referência do tipo rampa (reta): a função de

²Veja definição de tipo de sistema no Apêndice A.

transferência de laço ($C(s)G(s)$) deve ser no mínimo do tipo 2, ou seja, possuir ao menos 2 pólos na origem. Se essa função for do tipo 1, o sistema apresentará um erro finito e, se for do tipo 0, o erro será infinito, ou seja, o erro crescerá indefinidamente.

Rejeição a perturbações

Considere que o sistema atingiu o regime permanente com relação a uma determinada entrada de referência. Num dado instante, o sistema é submetido à ação de um sinal externo $q(s)$ que não se extingue no tempo por si só, por exemplo, um sinal do tipo salto ou rampa. Um sinal deste tipo é chamado *perturbação de carga*.

Exemplo 1.8 Considere um motor CC que está acionando uma determinada carga a uma velocidade constante. Num dado momento, a carga no eixo do motor é aumentada. Nesse caso, a velocidade do motor tende a cair (efeito da perturbação na saída do processo) e duas situações podem ocorrer: ou a velocidade irá estabilizar em um valor menor ou tenderá a se recuperar e voltar ao valor de antes da aplicação da perturbação.

Nos sistemas de controle é desejável que o efeito de perturbações de carga na saída do processo seja minimizado ou completamente anulado, após um determinado período transitório. No primeiro caso dizemos que houve uma *rejeição parcial* e no segundo uma *rejeição assintótica à perturbação*.

Exemplo 1.9 Considerando as mesmas funções de transferência do exemplo 1.7, os gráficos da Figura 1.11 mostram a rejeição parcial (caso a) e a rejeição assintótica (caso b) a uma perturbação do tipo salto aplicada respectivamente em 3 s e 8 s.

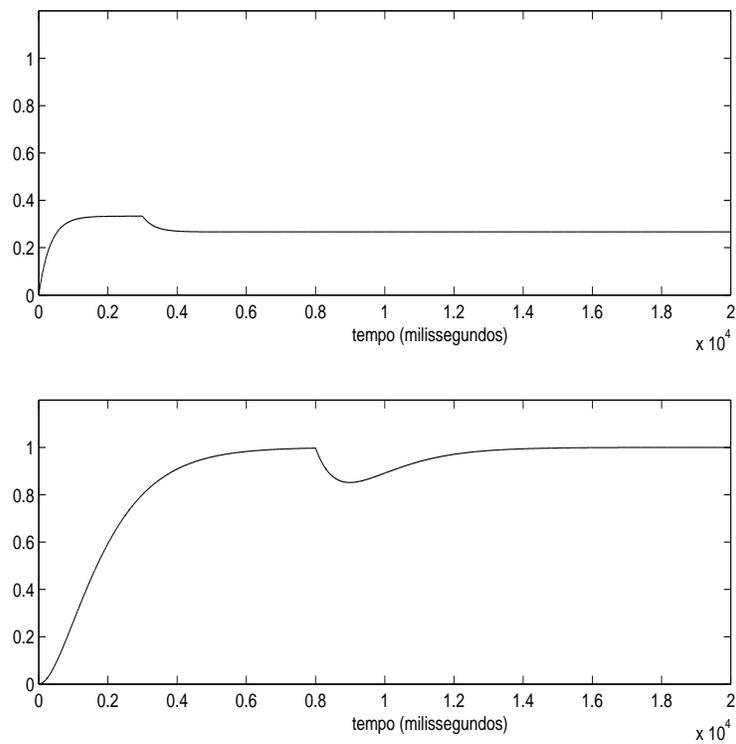


Figura 1.11 - Rejeição a perturbações

Para que um dado sistema em malha fechada rejeite assintoticamente uma dada perturbação, ele deve ser capaz de gerar internamente o sinal da perturbação, com sinal oposto a esta, de maneira a existir

um cancelamento. Matematicamente, isso equivale a dizer que o laço de realimentação entre a perturbação e a saída deve possuir os pólos do sinal da perturbação. Tal fato pode ser comprovado pelo teorema do valor final. Seguindo um raciocínio análogo ao feito para o problema de seguimento de referência, é possível então concluir que:

- para um sistema rejeitar assintoticamente uma perturbação do tipo salto, a função de transferência do controlador, $C(s)$, deve ser no mínimo do tipo 1, ou seja, possuir ao menos 1 pólo na origem;
- para um sistema rejeitar assintoticamente uma perturbação do tipo 2, a função de transferência do controlador, $C(s)$, deve ser no mínimo do tipo 2, ou seja, possuir ao menos 2 pólos na origem.

Cabe ressaltar que a análise apresentada considerou o efeito de uma perturbação aplicada na entrada do processo. Raciocínio similar, com conclusões ligeiramente diferentes, pode ser feito considerando a ação de perturbações em outros pontos da malha de controle.

1.4 Ações básicas de controle

O controlador é um dispositivo que realiza determinadas operações matemáticas sobre o sinal de erro $e(t)$ a fim de produzir um sinal $u(t)$ que, ao ser aplicado ao processo, faz com que sejam satisfeitos determinados objetivos de desempenho do sistema de controle. A estas operações matemáticas dá-se o nome de *ações de controle*. As ações de controle podem envolver operações muito variadas e por vezes complexas, porém existem alguns tipos básicos cuja aplicação coordenada e criteriosa é suficiente em grande parte dos projetos de sistemas de controle. Essas ações são chamadas ações básicas de controle e são as seguintes:

- ação *bang-bang*;
- ação proporcional;
- ação integral;
- ação derivativa.

1.4.1 Ação *bang-bang*

Neste tipo de ação o controlador consiste de um comparador, conforme apresentado na Figura 1.12.

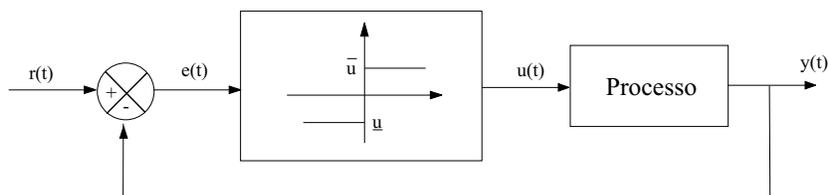


Figura 1.12 - Controle *bang-bang*

O sinal de controle $u(t)$ pode assumir apenas dois valores, conforme o erro seja positivo ou negativo. A ação de controle *bang-bang* pode ser descrita matematicamente como:

$$u(t) = \begin{cases} \bar{u} & \text{se } e(t) > 0 \\ \underline{u} & \text{se } e(t) < 0 \end{cases}$$

No caso particular em que $\bar{u} = 0$ (ou $\underline{u} = 0$), a ação *bang-bang* é chamada de ação liga-desliga.

A ação *bang-bang*, como já definida, apresenta uma indefinição do sinal de saída quando o erro vale zero. Essa indefinição pode, na presença de ruído no sinal de erro, levar a chaveamentos espúrios quando o sinal $e(t)$ for próximo de zero. Para evitar esse tipo de problema, na prática o controlador *bang-bang* é usualmente dotado de histerese. A ação *bang-bang* com histerese pode ser descrita da seguinte forma:

- se $u(t) = \bar{u}$, é necessário que o valor de $e(t)$ desça abaixo de e^- para que haja um chaveamento para \underline{u} ;
- se $u(t) = \underline{u}$, é necessário que o valor de $e(t)$ ultrapasse o valor de e^+ para que haja um chaveamento para \bar{u} .

Os gráficos da Figura 1.13 mostram as formas típicas do sinal de saída e de controle para um sistema em malha fechada como o da

Figura 1.12 com um controle *bang-bang* com histerese. No caso simulado, $\bar{u} = -\underline{u} = 0.5$ e $r(t) = 1 \forall t$. Note que, em regime permanente, a saída do sistema apresenta uma oscilação em torno do valor de referência. Esse fato demonstra a baixa precisão obtida com este tipo de controlador. A amplitude e a frequência da oscilação são funções do tamanho da histerese (e^- e e^+) e da amplitude do controle (\bar{u} e \underline{u}). A determinação do intervalo $[e^-, e^+]$ deve ser feita levando-se em consideração a precisão desejada, os níveis de ruído e a vida útil dos componentes.

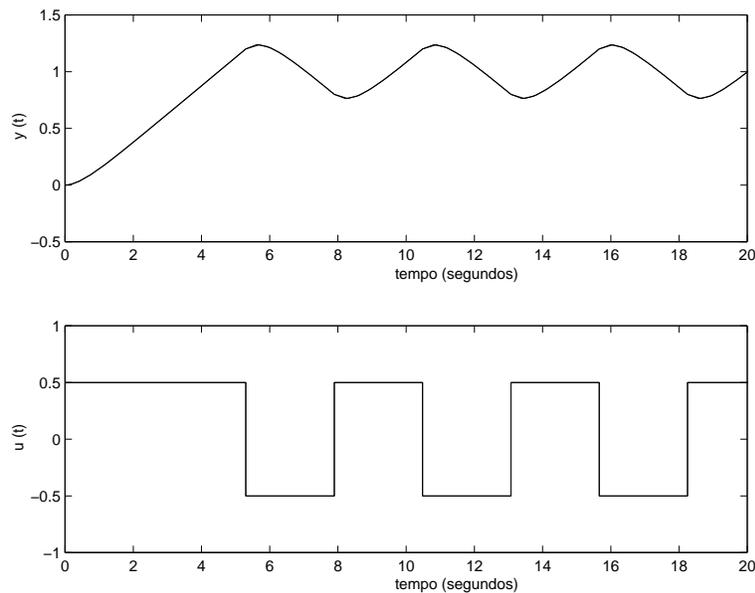


Figura 1.13 - Controle *bang-bang*

A ação de controle *bang-bang* pode assim ser considerada a ação de controle mais simples e mais econômica. Entretanto, esse tipo de ação possui limitações no que diz respeito ao comportamento dinâmico e em regime permanente do sistema em malha fechada. Suas aplicações restringem-se a sistemas em que não é necessário precisão nem um bom desempenho dinâmico.

Como exemplos corriqueiros de aplicação desse tipo de controle

Capítulo 1 Conceitos de base

temos: termostato da geladeira, controle de nível d'água a partir de bóias, etc. Uma outra aplicação da ação *bang-bang* é no chamado *método do relé* para sintonia de controladores PID; tal método será detalhado no Capítulo 3.

1.4.2 Ação proporcional

Neste tipo de ação o sinal de controle aplicado a cada instante à planta é proporcional à amplitude do valor do sinal de erro:

$$u(t) = Ke(t)$$

Assim, se em um dado instante o valor da saída do processo é menor (maior) que o valor da referência, isto é, $e(t) > 0$ ($e(t) < 0$), o controle a ser aplicado será positivo (negativo) e proporcional ao módulo de $e(t)$.

Considerando que a função de transferência $G(s)$ do processo a ser controlado é do tipo 0, quanto maior o ganho K , menor será o erro em regime permanente, isto é, o aumento da ação proporcional melhora a precisão do sistema em malha fechada. Esse erro pode ser diminuído com o aumento do ganho, entretanto nunca conseguiremos anular completamente o erro. Esse fato é ilustrado pelo exemplo 1.10.

Exemplo 1.10 Considere o sistema do diagrama em blocos da Figura 1.3 onde $H(s) = 1$, $G(s) = \frac{20(s+5)}{(s+10)(s+2)(s+15)}$ e $C(s) = K$.

Seja uma referência do tipo salto unitário ($r(s) = \frac{1}{s}$). Considerando as perturbações nulas, segundo a expressão (1.2), o valor da saída $y(t)$ em regime permanente pode ser determinado como:

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{20K(s+5)}{(s+10)(s+2)(s+15) + 20K(s+5)} \frac{1}{s} = \frac{100K}{300 + 100K}$$

Note que, quanto maior K , mais o valor da expressão se aproxima de 1. O erro em regime permanente é então dado por:

$$e(\infty) = 1 - \frac{100K}{300 + 100K}$$

Conclui-se então que, quanto maior o valor de K , menor é o valor do erro em regime permanente.

Cabe ressaltar, entretanto, que quanto maior o ganho, mais oscilatório tende a ficar o comportamento transitório do sistema em malha fechada. Na maioria dos processos físicos, o aumento excessivo do ganho proporcional pode levar o sistema à instabilidade. Esse fato será melhor justificado e ilustrado na seção 5.3.

1.4.3 Ação integral

A ação de controle integral consiste em aplicar um sinal de controle $u(t)$ proporcional à integral do sinal $e(t)$:

$$u(t) = \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau$$

onde T_i é chamado de *tempo integral* ou *reset-time*.

A ação integral tem assim uma função “armazenadora de energia”. Se a partir de um determinado tempo t o erro é igual a zero, isto é, $e(t) = 0$, o sinal de controle $u(t)$ será mantido em um valor constante proporcional à “energia armazenada” até o instante t . Esse fato permitirá, no sistema em malha fechada, obter-se o seguimento de uma referência constante com erro nulo em regime permanente, pois a ação integral garantirá a aplicação ao processo de um sinal de controle constante de forma a ter $r(t) = y(t)$, ou seja, $e(t) = 0$.

A função de transferência da ação integral é dada por:

$$C(s) = \frac{u(s)}{e(s)} = \frac{1}{sT_i}$$

Assim sendo, sob um ponto de vista matemático, a ação integral aumenta o tipo do sistema, ou seja, a nova função de transferência de laço será dada por $C(s)G(s)$ e possuirá um pólo adicional na origem, fato este que, como demonstrado na seção 1.3.4.2, permite obter erro nulo em regime permanente para determinadas referências. Pelo mesmo

raciocínio, a utilização de uma ação integral possibilitará a rejeição assintótica de certas perturbações na saída do processo.

A ação integral está, portanto, diretamente ligada à melhoria da precisão do sistema em regime permanente. Entretanto, a introdução de um pólo na origem na função de transferência de laço tende a tornar a resposta do sistema mais lenta e a torná-lo instável. Por esse motivo, esta ação de controle, em geral, não é aplicada de maneira isolada.

1.4.4 Ação derivativa

Esta ação corresponde à aplicação de um sinal de controle proporcional à derivada do sinal de erro:

$$u(t) = T_d \frac{d e(t)}{dt}$$

A função de transferência desta ação é dada por:

$$C(s) = \frac{u(s)}{e(s)} = T_d s \quad (1.3)$$

A implementação física de um *derivador puro*, como a função de transferência (1.3), é impossível (Haykin; Veen (2001)). Além disso, mesmo que isso fosse possível, na prática não seria desejável, na medida em que o ganho dessa função de transferência cresce com o aumento da frequência, fato este que deixaria o sistema extremamente sensível a ruídos de alta frequência. Por esses motivos a implementação da ação derivativa dá-se com a introdução de um pólo que tem justamente a finalidade de limitar o ganho em alta frequência. A função de transferência torna-se então:

$$C(s) = \frac{u(s)}{e(s)} = T_d \frac{sp}{s+p}$$

Os gráficos da Figura 1.14 ilustram as curvas de resposta em frequência de um derivador puro e o efeito da introdução do pólo em alta frequência. Note que para baixas frequências a característica é idêntica. Esse fato garante que, mesmo com o pólo limitador, a característica derivativa é mantida para sinais de baixas frequências.

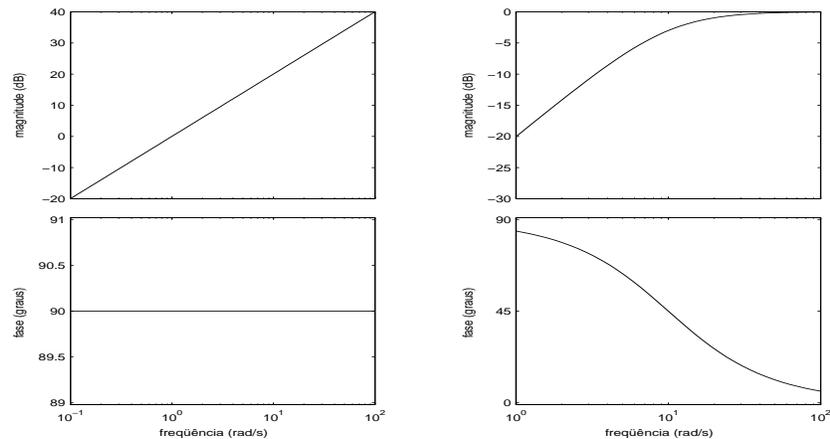


Figura 1.14 - Limitação do ganho em alta frequência

A derivada de uma função está relacionada com a tendência de variação desta função em um determinado instante de tempo. Assim, aplicar como controle um sinal proporcional à derivada do sinal de erro é equivalente a aplicar uma ação baseada na tendência de evolução do erro. A ação derivativa é então dita *antecipatória* ou *previdiva* e tende a fazer com que o sistema reaja mais rapidamente. Esse fato faz com que a ação derivativa seja utilizada para a obtenção de respostas transitórias mais rápidas, ou seja, para a melhora do comportamento dinâmico do sistema em malha fechada. Observe que, no caso em que o sinal de erro em regime permanente é constante, a ação derivativa será igual a zero, ou seja, esta ação atua apenas durante a resposta transitória, não tendo efeito em regime permanente.

1.5 Implementação de controladores

Dependendo do tipo de sinal processado pelo controlador, este pode ser implementado de forma *analógica* ou *digital*.

1.5.1 Controladores analógicos

Os controladores analógicos processam sinais de tempo contínuo. A variável de processo é medida através de um sensor que converte a grandeza física em um sinal elétrico, pneumático ou mecânico. Esse sinal é comparado com uma referência de mesma grandeza. A diferença entre os dois sinais é então aplicada a um controlador, que consiste de um sistema elétrico, pneumático ou mecânico que irá gerar um sinal contínuo a ser aplicado na entrada da planta a ser controlada. O diagrama da Figura 1.15 representa esse tipo de implementação.

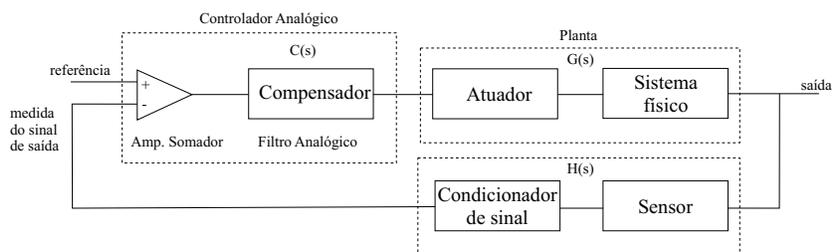


Figura 1.15 - Sistema de controle analógico

1.5.2 Controladores digitais

Um controlador digital processa sinais numéricos (digitais) e é fisicamente implementado como uma rotina a ser executada sobre um microprocessador ou microcontrolador.

O controle digital de um processo envolve o que chamamos de processo de *amostragem*. O sinal de saída (ou de erro) é amostrado periodicamente com um período T . O sinal amostrado (analógico) passa então por um conversor analógico/digital (A/D) onde é quantizado e transformado em um sinal numérico (palavra de n bits). Este sinal digital é lido por um microprocessador (ou microcontrolador) que vai então realizar operações numéricas com este sinal e gerar uma outra palavra de n bits correspondente à ação de controle que deverá ser aplicada sobre a planta. Este sinal numérico é então convertido novamente

em um sinal analógico por um conversor digital-analógico (D/A) que disponibilizará para a entrada do processo (atuador), até o próximo instante de amostragem, um sinal constante. Dessa forma, entre dois instantes de amostragem, o sinal efetivamente aplicado pelo controlador é um sinal contínuo de amplitude fixa.

Um sistema de controle digital típico é representado pelo diagrama em blocos da Figura 1.16. Detalharemos a seguir cada um dos blocos.

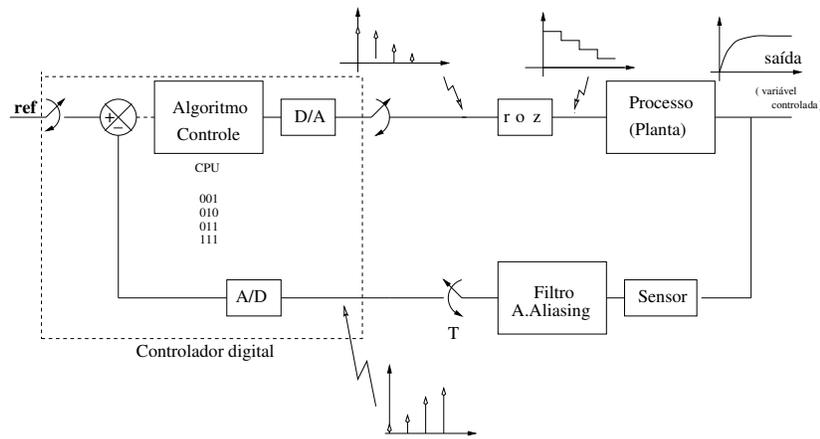


Figura 1.16 - Sistema de controle digital

- **Amostrador** - o amostrador é modelado por uma chave que fecha e abre (no caso ideal instantaneamente) a cada T unidades de tempo. Sua entrada consiste de um sinal analógico contínuo no tempo (sinal de saída proveniente do sensor) e sua saída é um sinal amostrado, ou seja, um trem de impulsos cujas amplitudes coincidem com as amplitudes do sinal analógico nos respectivos instantes de amostragem. Muitas vezes o amostrador é incorporado ao próprio conversor A/D. Nesse caso, a ação de abertura e fechamento de uma chave corresponde a um comando de leitura do conversor A/D.
- **Conversor A/D** - o conversor analógico-digital (A/D) converte

Capítulo 1 Conceitos de base

o sinal amostrado proveniente do amostrador em um sinal digital, ou seja, em uma seqüência de números quantizada.

- **CPU** - a unidade central de processamento pode ser um microprocessador ou um microcontrolador. Dentro da CPU será executada a rotina de controle que, a partir dos sinais amostrados e de sinais de controle já aplicados, irá calcular o sinal de controle a aplicar sobre a planta entre dois instantes de amostragem. A rotina de controle pode ser descrita pelos seguintes passos:
 - 1) leitura do conversor A/D;
 - 2) cálculo do sinal de controle (execução do algoritmo de controle);
 - 3) escrita no conversor D/A;
 - 4) atualização de variáveis;
 - 5) esperar T segundos e voltar ao passo 1.
- **Conversor D/A** - o sinal de controle digital calculado pela CPU é passado, a cada instante de amostragem T , a um conversor digital-analógico (D/A), que converte o sinal digital em um trem de impulsos quantizados (sinal amostrado quantizado).
- **Reconstrutor de ordem zero** - é responsável por “aproximar” o trem de impulsos quantizados proveniente do conversor D/A por um sinal contínuo quantizado. Essa aproximação consiste, no caso do reconstrutor de ordem zero, em aplicar entre dois instantes de amostragem, isto é, para t tal que $nT \leq t < (n+1)T$, um sinal analógico cujo valor é constante e coincide com o valor que foi convertido pelo D/A no instante nT .
- **Atuador** - o sinal de controle (variável manipulada) reconstruído é aplicado no atuador que converterá este sinal elétrico em uma outra grandeza física a ser aplicada na entrada da planta.
- **Planta ou processo** - o processo a ser controlado é, em geral, um sistema dinâmico de tempo contínuo. Em sua entrada será aplicado um sinal analógico proveniente do atuador que é constante entre 2 instantes de amostragem (sinal analógico quantizado).

- **Sensor/filtro *anti-alias*** - O sensor transforma o sinal físico da saída da planta (variável de processo) em um sinal elétrico que será amostrado. Em geral, acoplado ao sensor existe um filtro passa-baixas que tem por finalidade evitar o aparecimento do fenômeno de *aliasing* (Åström; Wittenmark (1997)).

Entre as vantagens de utilização de controladores digitais podemos citar:

- 1) flexibilidade - o controlador é representado por um algoritmo e, portanto, reconfigurações e modificações são feitas apenas alterando-se parâmetros de entrada ou algumas linhas de código, sem alteração do *hardware*.
- 2) possibilidade de tomada de decisões - como o controlador é implementado como uma seqüência de comandos programados em uma rotina, é possível considerar comandos de decisão. Tal fato permite, por exemplo, a implementação de controladores adaptativos. Respostas não-lineares de sensores e atuadores são também facilmente corrigidas (linearizadas) por *software*.
- 3) precisão - com relação aos coeficientes do controlador, obtém-se mais facilmente uma precisão maior se comparada com controladores analógicos. Nos controladores analógicos, a acurácia dos valores dos coeficientes do controlador é limitada pela precisão dos componentes eletrônicos utilizados. Nos controladores digitais, a precisão está relacionada apenas ao número de *bits* (palavra) com que são armazenados os coeficientes do controlador.
- 4) robustez - componentes eletrônicos são sensíveis a variações de temperatura e podem, ao longo do tempo, alterar suas características nominais. A implicação disso é a alteração dos coeficientes do controlador ao longo do tempo. Tal fato não ocorre em controlador digitais, pois o coeficiente é armazenado como um número em uma memória.

1.6 Exercícios

- 1) Determine o valor em regime permanente da saída dos sistemas da Figura 1.17, considerando o sinal de referência igual a um salto unitário (constante). Procure entender a influência do parâmetro k no erro $(r(t) - y(t))$ em regime permanente.

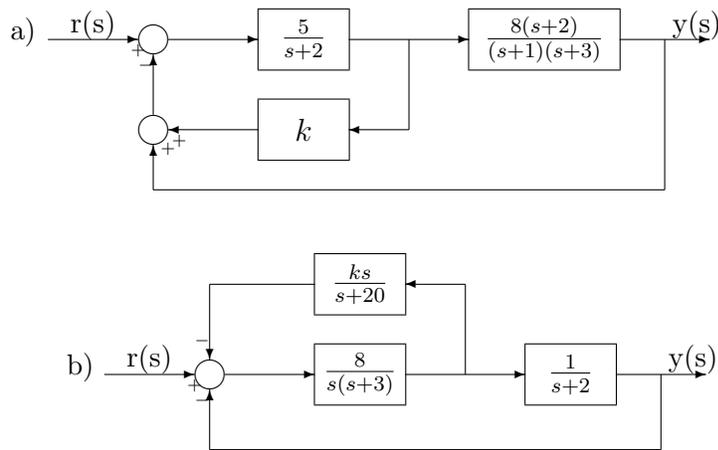


Figura 1.17 - Diagramas para exercício 1

- 2) Seja a função de transferência de um sistema de controle com realimentação unitária dada por:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

Determine expressões para obter o erro em regime permanente para entradas do tipo degrau e rampa em função dos parâmetros de $T(s)$.

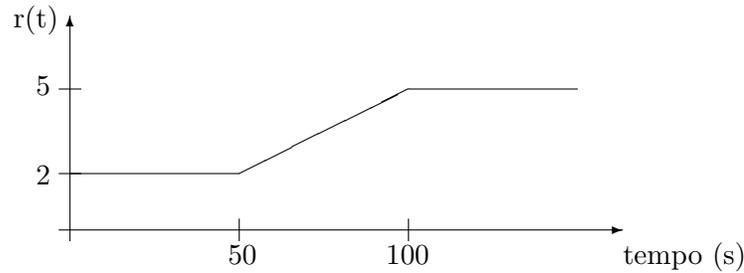


Figura 1.18 - Entrada de referência

- 3) Esboce a resposta dos sistemas a seguir para a excitação ilustrada na Figura 1.18.

$$a) T(s) = \frac{200}{(s + 20)(s + 10)(s + 1)}$$

$$b) T(s) = \frac{25(s + 4)(s + 8)}{s^4 + 25s^3 + 180s^2 + 300s + 800}$$

- 4) Para o sistema da Figura 1.19, determine T_i que faz com que o sistema apresente erro em regime permanente, em resposta à rampa unitária, igual a 0, 1.
- 5) Para cada uma das perturbações $Q_1(s)$ a $Q_4(s)$ do sistema da Figura 1.20, determine se é ou não rejeitada assintoticamente (justifique suas respostas) considerando perturbações tanto do tipo degrau quanto rampa.
- 6) Considere o sistema da Figura 1.21. Assuma que a dinâmica do sensor é dada por $H(s) = 1$.
- O sistema pode seguir uma referência r do tipo degrau com erro nulo em regime permanente? Justifique.
 - Pode o sistema rejeitar perturbações w do tipo degrau? Justifique.

Capítulo 1 Conceitos de base

- c) Esboce o gráfico de $u(t)$, $e(t)$ e $y(t)$ considerando a aplicação de um degrau de amplitude 1,5 em r e, 20 segundos após, a ação de uma perturbação w do tipo degrau de amplitude $-0,3$.
- d) Repita os três itens anteriores considerando $H(s) = \frac{5}{(s+20)}$.

7) Considere os dois sistemas da Figura 1.22.

- a) Mostre que os dois sistemas são capazes de seguir referências r constantes com erro nulo em regime permanente.
- b) Analise as diferenças entre os dois sistemas com relação à:
- robustez ao seguimento da referência se os parâmetros da planta variam (isto é, se os dois sistemas continuam seguindo a referência com erro nulo neste caso).
 - comportamento dinâmico do sistema em malha fechada.

8) Considere o diagrama em blocos da Figura 1.23.

- a) Que condições devem ser satisfeitas para que seja possível seguir uma referência senoidal, com frequência angular w rad/s, com erro nulo em regime permanente?

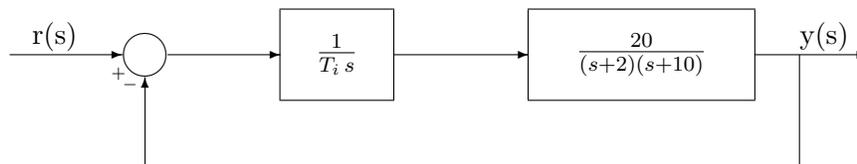


Figura 1.19 - Sistema para determinação de T_i

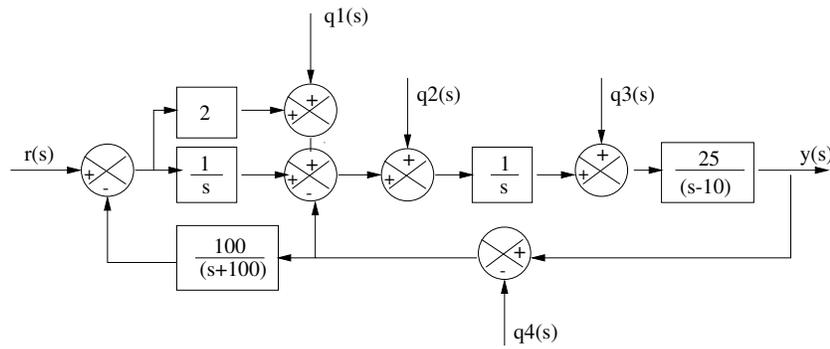


Figura 1.20 - Sistema para estudo de rejeição a perturbações

- b) Que condições devem ser satisfeitas para que seja possível rejeitar assintoticamente em regime permanente uma referência senoidal, com frequência angular w rad/s?
- c) Considere o controlador dado por $C(s) = \frac{1,6(s+1)}{s+8}$ e o processo com a função de transferência $G(s) = \frac{2}{s^2+s}$.
- Quanto valerá o ganho estático das seguintes funções de transferência?

$$T_r(s) = \frac{y(s)}{r(s)}$$

$$T_q(s) = \frac{y(s)}{q(s)}$$

- Supondo $r(t) = q(t) = -4$, quanto valerão $u(t)$ e $y(t)$ em regime permanente?

Capítulo 1 Conceitos de base

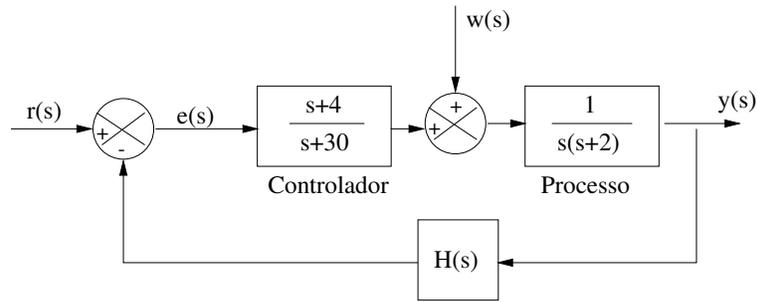


Figura 1.21 - Sistema para exercício 6

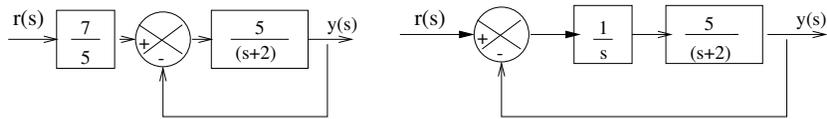


Figura 1.22 - Sistemas para exercício 7

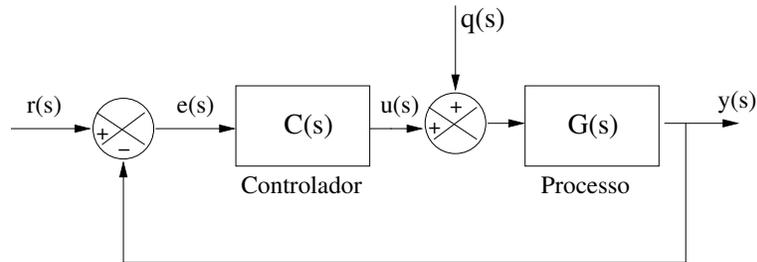


Figura 1.23 - Rejeição de perturbações

Sistemas de controle

Capítulo 2

O controlador PID

2.1 Introdução

A combinação das ações proporcional, integral e derivativa apresentadas no capítulo precedente para gerar um só sinal de controle dá origem ao que chamamos de *controlador proporcional-integral-derivativo* ou simplesmente PID. O controlador PID é capaz de eliminar erros de regime permanente, através da ação integral, bem como antecipar o comportamento do processo, graças à ação derivativa. A ação proporcional, por sua vez, faz com que o sistema reaja ao erro presente, conferindo ao sistema uma reação imediata e, portanto, rápida à ação de perturbações ou variações de referência de magnitudes significativas. De certa maneira, as três ações presentes no controlador PID permitem emular, matematicamente, o comportamento da mente do operador ao controlar um processo manualmente.

O sinal de controle gerado pelo controlador PID pode ser genericamente expresso como:

$$u(t) = K(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt}) \quad (2.1)$$

Dessa forma tem-se três parâmetros de sintonia no controlador: o ganho proporcional K (ação proporcional), o tempo integral T_i (ação integral) e o tempo derivativo T_d (ação derivativa).

Considerando a expressão (2.1), o sinal de controle oriundo do controlador PID pode ser visto como a soma de 3 sinais ($p(t), i(t), d(t)$)

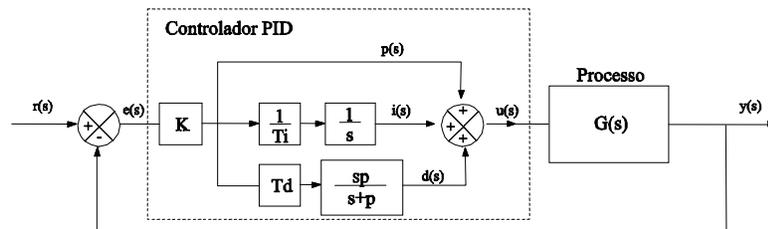


Figura 2.1 - Diagrama em blocos de um controlador PID

obtidos a partir do sinal de erro. O diagrama dado na Figura 2.1 ilustra esse fato.

Apesar de termos a disponibilidade das três ações básicas, dependendo da aplicação não será necessário a utilização de uma ou mais destas ações. Por exemplo, em um processo do tipo 1 (isto é, apresentando um pólo na origem) a utilização da ação integral não se fará necessária se o objetivo de controle for o de seguir, com erro nulo, um sinal de referência constante. Basicamente temos quatro configurações possíveis de controladores a partir de uma estrutura PID:

- proporcional (P);
- proporcional-integral (PI);
- proporcional-derivativo (PD);
- proporcional-integral-derivativo (PID).

Apesar de sua estrutura relativamente simples, os controladores PID têm-se revelado suficientes para o controle adequado de uma grande gama de processos. Pode-se assim dizer que o controlador PID é ainda hoje, apesar da existência de inúmeras técnicas de controle mais sofisticadas, o mais utilizado na indústria. Estima-se que mais de 90% das malhas de controle encontradas em processos industriais operam com controladores PID (Åström; Hägglund (1995)).

Capítulo 2 O controlador PID

Os controladores PID são encontrados no ambiente industrial sob a forma de equipamentos *single-loop* (ou seja, equipamentos dedicados especificamente à execução de um algoritmo PID em uma malha de controle) digitais ou analógicos, como funções programadas em *controladores lógicos programáveis* (CLPs) ou em blocos funcionais que são executados em *sistemas digitais de controle distribuídos* (SDCDs) e barramentos industriais.

Ainda que largamente encontrados na indústria, os controladores PID são muitas vezes subutilizados. É grande o número de malhas de controle que operam em modo manual (ou seja, são controladas por comandos de um operador) ou que, apesar de operarem em modo automático, apresentam comportamentos característicos de má sintonia. Várias são as conseqüências daninhas desses fatos sobre a qualidade e produtividade dos processos industriais. Malhas PID mal sintonizadas causam perda de qualidade do produto final, redução da eficiência do processo produtivo, gastos desnecessários de energia, redução de vida útil dos equipamentos, entre outros problemas.

Dada a importância e a aplicabilidade dos controladores PID já destacadas, dedicamos este capítulo e o seguinte ao estudo detalhado do controlador PID e de técnicas de sintonia específicas que permitem, de forma rápida e sistemática, obter ajustes eficazes dos ganhos do controlador PID para uma grande gama de processos. Por outro lado, métodos clássicos de projeto, baseados no conhecimento do modelo do processo, são também diretamente aplicáveis ao caso da sintonia do controlador PID, permitindo em geral um ajuste de parâmetros que confira características de desempenho mais específicas. Esses métodos clássicos de projeto são apresentados nos Capítulos 5 e 6.

2.2 A banda proporcional

Na prática, por restrições de ordem física ou de segurança, não é possível a aplicação de sinais de controle de amplitudes ilimitadas. Tem-se assim um limite máximo u_{max} e um limite mínimo u_{min} para a variável de controle.

O sinal de controle dado pela equação (2.1) pode ser reescrito genericamente como:

$$u(t) = Kf(e(t)) = Kw(t)$$

onde $f(\cdot)$ denota um funcional genérico. No caso do PID tem-se $f(e(t)) = (e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt})$.

Considerando-se os limites do controle, tem-se que o sinal que será efetivamente aplicado ao processo é descrito por:

$$u(t) = \begin{cases} u_{max} & \text{se } Kw(t) > u_{max} \\ Kw(t) & \text{se } u_{min} \leq Kw(t) \leq u_{max} \\ u_{min} & \text{se } Kw(t) < u_{min} \end{cases}$$

Assim, se $Kw(t) > u_{max}$ ou se $Kw(t) < u_{min}$ diz-se que há *saturação de controle*. Nesse caso o comportamento do controlador torna-se *não-linear*. Para que o comportamento do controlador PID seja dado exatamente pela expressão linear (2.1), o sinal $w(t)$ deve pertencer ao intervalo $[w_1, w_2]$ onde $w_1 = u_{min}/K$ e $w_2 = u_{max}/K$. A largura do intervalo $[w_1, w_2]$ é o que chamamos de *banda proporcional*, P_b

$$P_b = w_2 - w_1$$

A partir dessa definição podemos escrever que:

$$u_{max} - u_{min} = KP_b$$

Em resumo: quanto maior a banda proporcional, mais dificilmente ocorrerá saturação de controle, ou seja, maior é a região de comportamento linear para o controlador PID. A Figura 2.2 ilustra graficamente a banda proporcional.

2.3 O controlador proporcional

Muitas vezes, processos simples podem ser controlados satisfatoriamente apenas com a ação proporcional. Este é caso em que o processo a ser controlado é do tipo 1 (possui um pólo na origem) e o desempenho dinâmico (rapidez de resposta, sobrepasso) obtido somente com

Capítulo 2 O controlador PID

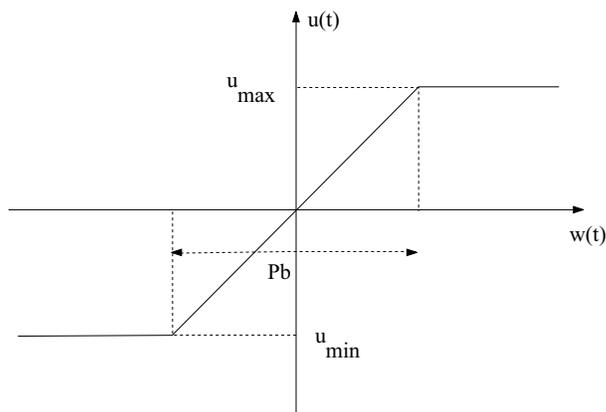


Figura 2.2 - Banda proporcional

a ação proporcional já é satisfatório. As ações integral e derivativa do controlador PID são simplesmente desligadas e tem-se então:

$$u(t) = K(e(t))$$

Em muitos controladores PID industriais, ao invés de especificarmos diretamente o valor de K , especifica-se o valor da banda proporcional em valor percentual. Considerando $u_{max} - u_{min} = 100\%$, tem-se

$$K = \frac{100\%}{P_b}$$

Logicamente, quanto maior o valor de K , menor é a banda proporcional e maior será o esforço de controle (energia de controle). O efeito disso é que o sistema tende a responder mais rapidamente. Entretanto, excessivos valores de K podem fazer com que a resposta do sistema apresente um sobrepasso considerável ou mesmo se torne instável. Do ponto de vista do comportamento em regime permanente, foi visto na apresentação da ação proporcional (exemplo 1.10) que, para um sistema do tipo 0, quanto maior o ganho K , menor será o valor do erro em regime permanente, mas este erro nunca será completamente anulado. Tais fatos são ilustrados pelo exemplo a seguir.

Exemplo 2.1 Considere o diagrama em blocos da Figura 2.1 com $T_i = \infty$, $T_d = 0$ e:

$$G(s) = \frac{e^{-0,5 s}}{(s + 1)(s + 2)}$$

A Figura 2.3 mostra a resposta do sistema a uma entrada do tipo salto unitário. Observe que, à medida que K aumenta, o tempo de subida tende a diminuir, entretanto, nota-se um aumento do sobrepasso e a diminuição no amortecimento da resposta. Além disso, quanto maior K , mais o valor da saída em regime permanente se aproxima de 1, ou seja, menor é o erro em regime permanente.

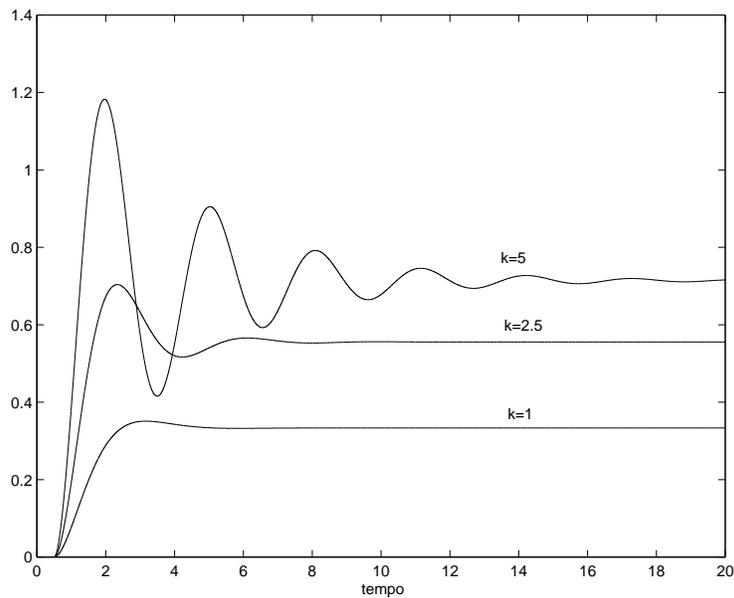


Figura 2.3 - Efeito da variação do ganho proporcional

2.4 O controlador proporcional-integral

A principal função da ação integral é fazer com que processos do tipo 0 sigam, com erro nulo, um sinal de referência do tipo salto (constante por partes). Entretanto, a ação integral, se aplicada isoladamente, tende a piorar a estabilidade relativa do sistema. Para contrabalançar esse fato, a ação integral é, em geral, utilizada em conjunto com a ação proporcional, constituindo o controlador denominado PI, cujo sinal de controle é dado por:

$$u(t) = K(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau) \quad (2.2)$$

O gráfico da Figura 2.4 ilustra a aplicação da ação integral conjuntamente com a ação proporcional. A partir desse gráfico podemos dar uma interpretação para T_i : o tempo integral (*reset-time*) corresponde ao tempo em que a parcela relativa à parte proporcional da ação de controle é duplicada (Ogatta (1993)).

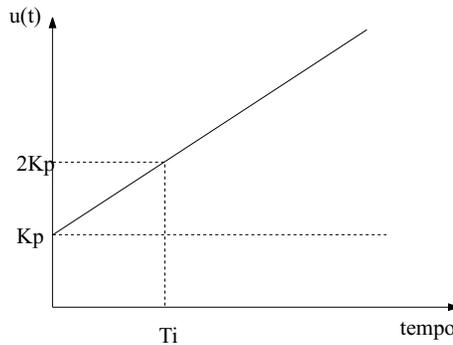


Figura 2.4 - Efeito da ação integral

Aplicando a transformada de Laplace na equação (2.2) tem-se a seguinte função de transferência para o controlador PI:

$$C_{pi}(s) = \frac{u(s)}{e(s)} = \frac{K(s + 1/T_i)}{s}$$

Considere agora o sistema da Figura 2.1 com $G(s)$ do tipo 0, o controlador sendo um PI e a referência sendo constante. Supondo que os parâmetros do PI tenham sido escolhidos de forma adequada, fazendo com que o sistema em malha fechada seja estável, o comportamento do sistema em regime permanente pode ser descrito da forma a seguir.

- A parcela relativa à ação proporcional será nula. Isso é justificado pelo fato de que o erro em regime permanente será igual a zero.
- A parcela relativa à ação integral será constante. Como o erro em regime permanente é nulo, o integrador pára de integrar e mantém em sua saída o valor até então armazenado ao longo do tempo. Este valor dependerá do ganho estático do processo, ou seja, de $G(0)$, e do valor da referência constante. Mais especificamente, tem-se que:

$$u(\infty) = i(\infty) = \frac{r(\infty)}{G(0)}$$

A influência da sintonia do parâmetro T_i na resposta do sistema é ilustrada no próximo exemplo.

Exemplo 2.2 Seja o mesmo sistema considerado no exemplo 2.1 com $K = 2$, e $T_d = 0$. Considerando a aplicação de uma referência unitária constante ($r(t) = 1$) no instante $t = 0$, na Figura 2.5 é ilustrada a influência da sintonia do parâmetro T_i na resposta do sistema. Para altos valores de T_i , tem-se a predominância da ação proporcional, sendo que $T_i = \infty$ corresponde ao controlador proporcional. Note que, nesse caso, existe um erro em regime permanente. À medida que diminuimos T_i , a ação integral começa a predominar sobre a ação proporcional e a resposta tende a se aproximar mais rapidamente da referência, ou seja, o erro em regime tende a ser anulado mais rapidamente. Reduzindo T_i ainda mais, observa-se que a resposta passa a apresentar comportamento oscilatório, numa tendência de instabilização. Isso se justifica pelo fato de que, nesse caso, o zero do controlador (que está alocado em $-\frac{1}{T_i}$) afasta-se substancialmente do pólo na origem, e o controlador tende a comportar-se como um integrador puro. Uma análise

Capítulo 2 O controlador PID

rigorosa desse comportamento pode ser feita pelos métodos clássicos apresentados nos Capítulos 5 e 6.

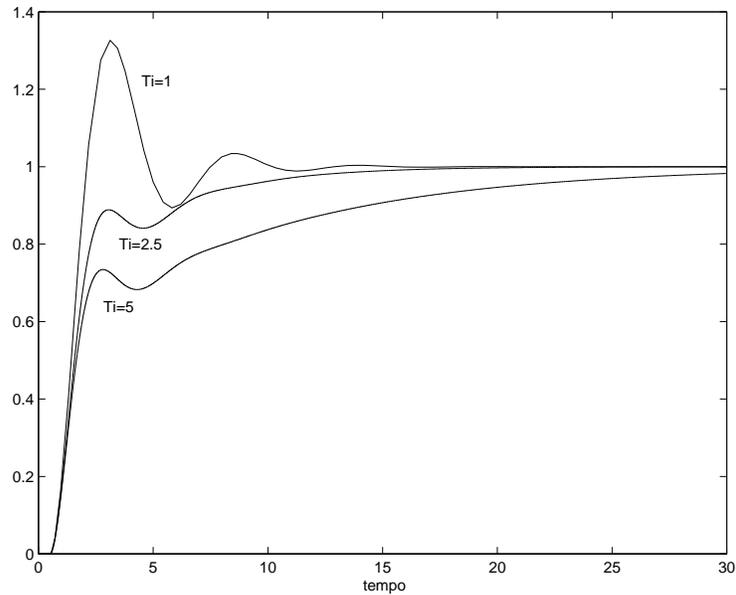


Figura 2.5 - PI - efeito da variação do tempo integral

O gráfico da Figura 2.6 mostra o comportamento dos sinais de controle ($u(t)$), do termo proporcional ($p(t)$) e do termo integral ($i(t)$). Note que $G(0) = 0,5$ e o valor do sinal de controle em regime permanente é dado pelo valor do termo integral, sendo igual a 2, ou seja, $1/G(0)$.

2.5 O controlador proporcional-derivativo

A saída de um processo apresenta uma certa “inércia” com relação a modificações na variável de entrada. Essa “inércia” explica-se pela dinâmica do processo que faz com que uma mudança na variável de controle provoque uma mudança considerável na saída do processo

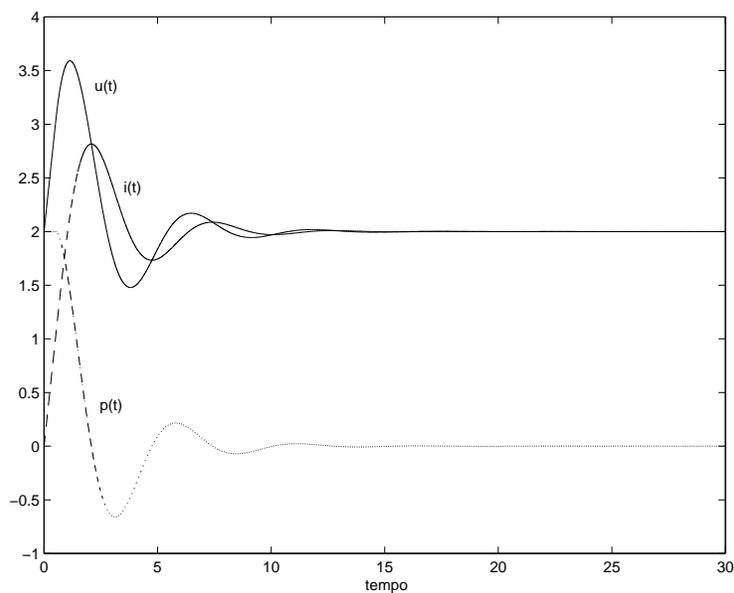


Figura 2.6 - PI - sinal de controle, termo proporcional e termo integral

somente após um certo tempo. Esse fato é responsável por transitórios com grande amplitude e período de oscilação, podendo, por vezes, gerar mesmo respostas instáveis.

A ação derivativa tem a função de antecipar a ação de controle a fim de que o processo reaja mais rápido e que transitórios com característica excessivamente oscilatória sejam evitados. Nesse caso, o sinal de controle a ser aplicado é proporcional a uma *predição* da saída do processo.

A estrutura básica do controlador PD é dada por:

$$u(t) = K(e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt})$$

Considerando-se que $e(t + T_d)$ pode ser aproximado por:

$$e(t + T_d) \approx e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt}$$

Capítulo 2 O controlador PID

tem-se que $u(t) \approx Ke(t+T_d)$, ou seja, o sinal de controle é proporcional à estimativa do erro de controle T_d unidades de tempo no futuro. Em outras palavras, a previsão é feita extrapolando o valor do erro pela reta tangente à curva do erro no instante t (ver Figura 2.7).

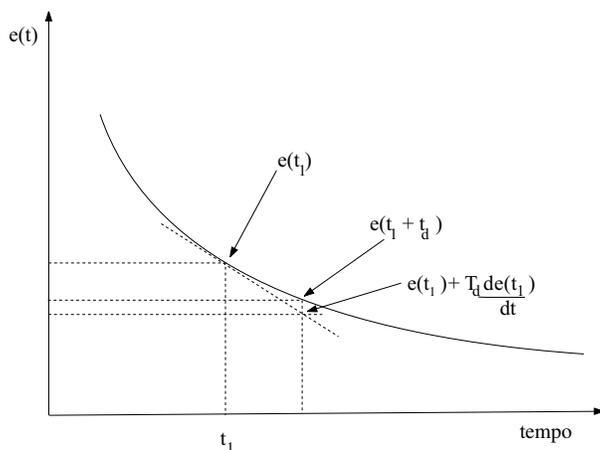


Figura 2.7 - Interpretação da ação proporcional-derivativa

Esta ação preditiva tende a aumentar a estabilidade relativa do sistema e a tornar sua resposta transitória mais rápida e menos oscilatória. Para sistemas estáveis em malha fechada operando com referências constantes, a contribuição em regime permanente da ação derivativa é nula, uma vez que o erro tende a ser um sinal constante. Nesse caso, o controlador PD apresenta, em regime permanente, o mesmo comportamento de um controlador proporcional.

Na prática, conforme discutido na seção 1.4.4, deve-se limitar o ganho da parte derivativa em altas frequências através do acréscimo de um pólo à função de transferência do controlador. Então a função de transferência do controlador PD é dada por:

$$C_{pd} = \frac{u(s)}{e(s)} = K \left(1 + \frac{spT_d}{s+p} \right) = \frac{K(1+pT_d) \left(s + \frac{p}{1+pT_d} \right)}{(s+p)}$$

Observe que o zero do controlador PD está sempre à direita do pólo. Note também que, ao aumentarmos T_d , o zero do controlador tende

à origem, significando a predominância da ação derivativa. De uma maneira geral, qualquer filtro cuja função de transferência constitua-se de um pólo e um zero, estritamente negativos e com o módulo do pólo maior que o módulo do zero, representa potencialmente um controlador PD. Por sua resposta em frequência, os controladores PD são equivalentes a compensadores de avanço de fase (ver Capítulo 6 para maiores detalhes).

2.6 O controlador proporcional-integral-derivativo

O controlador PID combina as vantagens do controlador PI e PD. A ação integral está diretamente ligada à precisão do sistema, sendo responsável pelo erro nulo em regime permanente. O efeito desestabilizador do controlador I é contrabalançado pela ação derivativa, que tende a aumentar a estabilidade relativa do sistema ao mesmo tempo que torna a resposta do sistema mais rápida devido ao seu efeito antecipatório.

A função de transferência do controlador PID é dada por:

$$\begin{aligned} C_{pid}(s) &= \frac{u(s)}{e(s)} = K\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d \frac{p s}{s + p}\right) \\ &= \frac{K(1 + pT_d)\left(s^2 + \frac{1+pT_i}{T_i(1+pT_d)}s + \frac{p}{T_i(1+pT_d)}\right)}{s(s + p)} \end{aligned} \quad (2.3)$$

É importante notar que a equação (2.1) e a função de transferência (2.3) constituem a forma padrão mais utilizada do controlador PID. Outras versões e variações existem, que consistem simplesmente em escrever de maneira distinta, utilizando outras variáveis, as mesmas equações.

Exemplo 2.3 Seja o mesmo sistema considerado no exemplo 2.1 com $K = 4$ e $T_i = 1$. Considerando a aplicação de uma referência unitária constante ($r(t) = 1$) no instante $t = 0$, a Figura 2.8 mostra o efeito da

Capítulo 2 O controlador PID

ação derivativa considerando-se um pólo limitador de ganho em alta frequência em 100 (isto é, $p = 100$). Note que, aumentando a ação derivativa, é possível tornar o sistema mais rápido e mais amortecido.

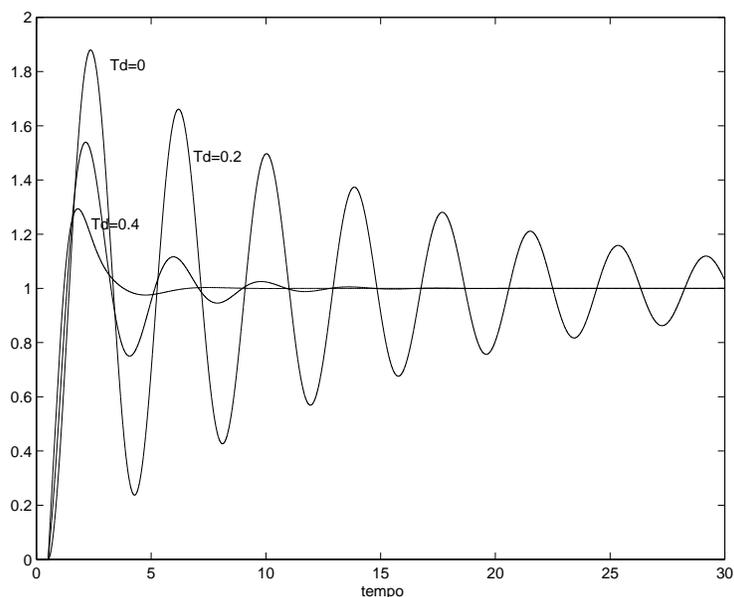


Figura 2.8 - PID - efeito do tempo derivativo

Considerando $K = 4$, $T_i = 1$ e $T_d = 0, 2$, são mostrados no gráfico da Figura 2.9 os sinais correspondentes às parcelas proporcional, integral e derivativa. Pode-se observar que, no momento de aplicação do salto na referência, o valor do sinal correspondente à parcela derivativa tende a ser bastante grande.³ Isso se justifica pelo fato de que, nesse instante, a derivada do sinal de erro tende a infinito. Em regime permanente, tem-se que a parcela da ação derivativa se anula, uma vez que o erro é constante e igual a zero. A parcela integral é então responsável, como visto anteriormente, por manter um sinal constante e diferente de zero aplicado sobre a planta em regime permanente.

³O valor real tende a 80, não sendo possível sua completa visualização na escala do gráfico.

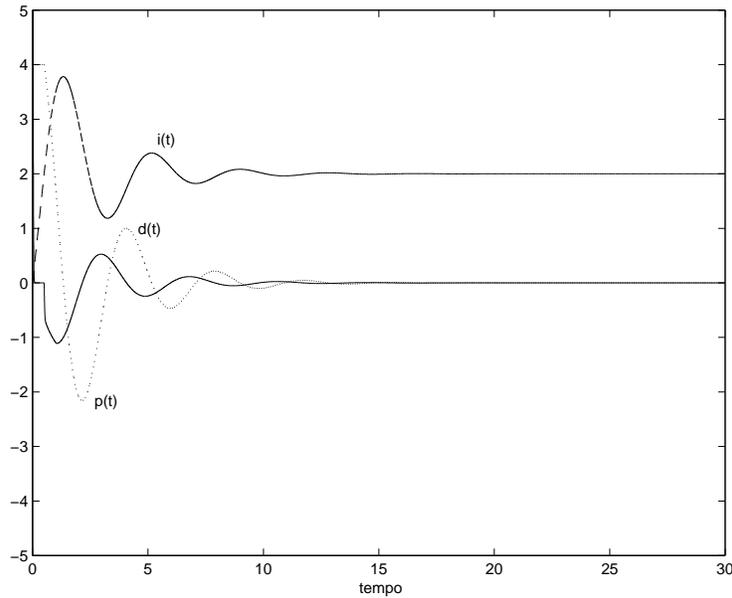


Figura 2.9 - PID - sinais das parcelas proporcional, integral e derivativa

2.7 Implementação analógica

Nos dias de hoje a implementação analógica de controladores PID se dá mais comumente através de circuitos eletrônicos.⁴ Do ponto de vista dessa implementação, o controlador nada mais é do que um filtro. No caso de um controlador PID, este filtro tem a característica de um filtro rejeita-faixa. Com efeito, sua função de transferência possui: 1 pólo na origem, 2 zeros em frequências intermediárias e 1 pólo em alta frequência. Já os casos particulares do PI e do PD correspondem respectivamente a um filtro passa-baixas (com pólo na origem) e um filtro passa-altas.

⁴Veja em Ogatta (1993) exemplos de implementação das ações básicas de controle de maneira pneumática.

Capítulo 2 O controlador PID

Assim sendo, a implementação analógica do controlador PID baseia-se na teoria de síntese de redes, ou seja, na implementação de um circuito eletrônico que apresente uma dada função de transferência. Em particular, a função de transferência pode ser realizada por um filtro ativo, utilizando-se para isso amplificadores operacionais. Por apresentarem alta impedância de entrada, filtros ativos assim construídos têm a vantagem de permitir a interconexão de funções em série, isto é, dois filtros ativos com funções de transferência $H_1(s)$ e $H_2(s)$ quando conectados em série apresentarão função de transferência $H(s) = H_1(s)H_2(s)$. Tal fato permite que o controlador PID seja implementado a partir da utilização de circuitos simples que implementem funções de ganho, integração, diferenciação e soma.

A forma de implementação do controlador PID pode variar segundo o fabricante. Assim, é de suma importância, para um bom ajuste do controlador, ter o conhecimento da estrutura de controlador PID utilizada pelo fabricante, bem como quais as unidades em que os ganhos derivativo e integral devem ser programados. Parâmetros projetados para uma dada estrutura (forma de implementação) podem facilmente ser traduzidos para uma outra.

A seguir serão apresentadas duas formas de implementação de um controlador PID a partir da utilização de circuitos baseados em amplificadores operacionais.

2.7.1 Forma paralela

Esta implementação baseia-se na estrutura padrão do controlador PID apresentada no diagrama em blocos da Figura 2.1, ou seja, utiliza-se de circuitos que implementam de forma independente as 3 ações básicas. Uma possível topologia de circuito a ser implementado é dada na Figura 2.10.

O primeiro estágio corresponde ao ganho proporcional do PID:

$$K = \frac{R_2}{R_1}$$

No segundo estágio, tem-se um amplificador de ganho unitário, um circuito integrador e um circuito diferenciador com limitação de alta

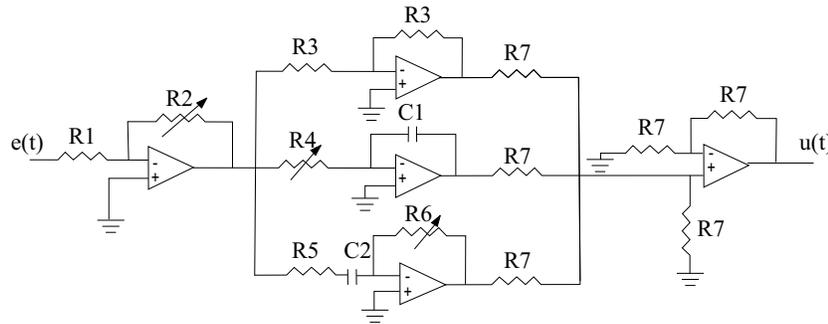


Figura 2.10 - Implementação analógica de um PID - forma paralela

freqüência. Note que:

$$T_i = C_1 R_4, \quad T_d = R_6 C_2, \quad p = \frac{1}{C_2 R_5}$$

O terceiro estágio corresponde a um amplificador que soma os sinais provenientes dos 3 circuitos do segundo estágio. A variação dos ganhos K, T_i e T_d pode então ser feita de forma independente variando-se, respectivamente, os resistores R_2, R_4 e R_6 .

2.7.2 Forma série

A forma série consiste, como o próprio nome diz, na conexão em série de um bloco PI com um bloco PD. Genericamente temos a implementação de duas funções de transferência em cascata, uma referente a um PI e outra referente a um PD:

$$C(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) \left(1 + \frac{s T_d p}{s + p}\right)$$

O pólo na origem e um dos zeros são dados pelo circuito que implementa o PI. O outro zero e o pólo limitador de ganho em alta freqüência são dados pelo circuito que implementa o PD. Assim, é possível ajustar cada um dos zeros do controlador de maneira independente, a partir da variação de T_i e T_d .

Capítulo 2 O controlador PID

Uma possível topologia de circuito a ser implementado é dada na Figura 2.11.

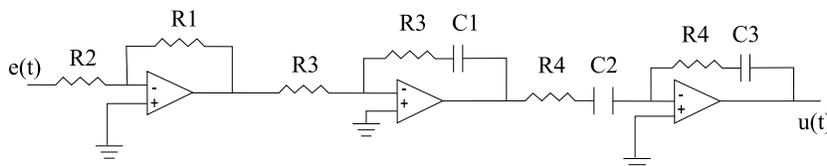


Figura 2.11 - Implementação analógica de um PID - forma série

Esta configuração tem a limitação de que os dois zeros do PID sejam reais, não sendo apropriada, por exemplo, para a compensação de processos oscilatórios (com pólos complexos). Entretanto, o fato de ser possível ajustar independentemente cada um dos zeros através da variação de T_i ou T_d facilita bastante o ajuste baseado nos métodos do lugar das raízes ou da resposta em frequência, como será visto nos Capítulos 5 e 6.

2.7.3 Implementação da ação derivativa

2.7.3.1 Filtragem em alta frequência

Como visto na seção 1.4.4, a fim de evitar problemas com ruídos de alta frequência, que seriam amplificados em demasia por uma ação derivativa pura, deve-se limitar o ganho desta ação em altas frequências com a adição de um pólo p . Entretanto, em controladores PID comerciais, a posição desse pólo não é, em geral, informada pelo fabricante e nem pode ser modificada pelo usuário. Nesse caso, considera-se que a frequência do pólo é suficientemente alta, podendo ser desprezada para efeitos de projeto.

Uma regra prática para fixar a posição de p consiste em vinculá-lo ao ganho T_d como segue (Åström; Hägglund (1995)):

$$p = \frac{\alpha}{T_d}$$

onde α deve ser escolhido entre 8 e 10. Outra opção é basear esta escolha no método do lugar das raízes para projeto de controladores.

2.7.3.2 Aplicação sobre a saída

Como visto no exemplo 2.3, no instante em que ocorre uma mudança de referência constante, o valor do termo derivativo tende a ser muito grande. Tal fato pode levar à saturação imediata do controlador, o que pode não ser desejável em algumas situações. Uma forma alternativa de implementação da ação derivativa nesse caso consiste em aplicá-la não sobre o erro, mas sim sobre a saída do processo.

Considerando uma referência constante $r(t) = r$ e realimentação unitária, ao aplicar-se a ação derivativa sobre o erro obtém-se:

$$\frac{de(t)}{dt} = \frac{d(r - y(t))}{dt} = -\frac{d(y(t))}{dt}$$

ou seja, equivale a aplicá-la diretamente ao sinal de saída da planta. Como a saída do processo não varia abruptamente quando se aplica um salto na referência (ao contrário do erro), evita-se assim o problema de aparecimento de um pico de grande amplitude no sinal derivativo.

A equação do PID com a ação derivativa aplicada sobre a saída é reescrita como:

$$u(t) = K(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau - T_d \frac{dy(t)}{dt}) \quad (2.4)$$

É importante ressaltar que estas considerações se aplicam apenas ao caso de referência constante, ou seja, sinais de referência do tipo salto.

2.8 Implementação digital

A implementação do controlador PID pode ser feita a partir de aproximações numéricas das derivadas e da integral que aparecem na lei de controle. Dessa forma, é possível descrever cada uma das ações por uma *equação de recorrência* (também chamada *equação de diferenças*). As equações de recorrência descrevem as operações matemáticas a serem programadas no microcontrolador ou no microcomputador onde será implementado o PID digital.

O sinal de controle será atualizado apenas nos instantes de tempo em que ocorre amostragem. O instante de tempo em que ocorre a k -ésima amostragem do sinal pode ser genericamente denominado $t_k =$

Capítulo 2 O controlador PID

kT , onde T é o período de amostragem. Podemos então simplificar a notação denotando a saída do processo, o sinal de referência, o sinal de controle e o erro no instante t_k respectivamente como $y(k)$, $r(k)$, $u(k)$ e $e(k)$.

O período de amostragem deve ser escolhido adequadamente, sendo tão pequeno quanto necessário para proporcionar ao controlador informações suficientemente freqüentes da evolução da saída do processo. Uma discussão detalhada da escolha do período de amostragem, a qual envolve aspectos numéricos, custo de implementação e vários outros aspectos, pode ser encontrada em Åström; Wittenmark (1997) e Franklin; Powell; Naeini (1994). Como regra geral, aplicável em grande número de casos, o período de amostragem deve ser tal que ocorram pelo menos cinco amostras da saída por constante de tempo dominante do processo.

2.8.1 Ação proporcional

O termo proporcional discretizado a ser aplicado no instante k é dado por:

$$P(k) = K(r(k) - y(k)) = K(e(k))$$

2.8.2 Ação integral

A ação integral é dada por:

$$I(t) = \frac{K}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau$$

ou, equivalentemente, por

$$\frac{dI}{dt} = \frac{K}{T_i} e(t) \quad (2.5)$$

Existem várias maneiras de discretizar, ou seja, aproximar numericamente a equação (2.5). A seguir apresentamos dois métodos (veja Åström; Wittenmark (1997) e Franklin; Powell; Naeini (1994) para mais detalhes).

Diferenças em atraso - nesse caso temos a seguinte aproximação para a equação (2.5):

$$\frac{I(k) - I(k-1)}{T} = \frac{K}{T_i} e(k)$$

a qual é equivalente à seguinte equação de recorrência:

$$I(k) = I(k-1) + \frac{TK}{T_i} e(k)$$

Aproximação de Tustin - a aproximação de Tustin, também conhecida como *transformação bilinear*, nos dá a seguinte equação de recorrência:

$$I(k) = I(k-1) + \frac{KT}{T_i} \frac{e(k) + e(k-1)}{2} \quad (2.6)$$

Observe que a equação (2.6) é equivalente a uma integração numérica utilizando o *método dos trapézios*.

2.8.3 Ação derivativa

Considerando-se a função de transferência do termo derivativo dada como:

$$\frac{D(s)}{e(s)} = KT_d \frac{sp}{s+p}$$

a equação diferencial correspondente ao termo derivativo é dada por:

$$\frac{dD(t)}{dt} + D(t)p = pKT_d \frac{de(t)}{dt} \quad (2.7)$$

Da mesma forma que o termo integral, a equação (2.7) pode ser discretizada segundo vários métodos. Apresentamos a seguir a discretização da ação derivativa utilizando a aproximação por diferenças em atraso e a aproximação de Tustin.

Diferenças em atraso - nesse caso temos a seguinte aproximação para a equação (2.7):

$$\frac{D(k) - D(k-1)}{T} + pD(k) = pKT_d \frac{e(k) - e(k-1)}{T}$$

Capítulo 2 O controlador PID

A equação de recorrência obtida nesse caso é:

$$D(k) = \frac{1}{1 + pT}D(k - 1) + \frac{pKT_d}{1 + pT}(e(k) - e(k - 1))$$

Aproximação de Tustin - pela aproximação de Tustin temos a seguinte equação de recorrência:

$$D(k) = \frac{(2 - pT)}{(2 + pT)}D(k - 1) + \frac{2pKT_d}{(2 + pT)}(e(k) - e(k - 1))$$

2.8.4 Rotina PID

A partir do que foi apresentado anteriormente, uma rotina para a implementação digital do algoritmo de controle PID pode ser escrita a partir das equações de recorrência de cada uma das ações. Um exemplo de código básico, utilizando a aproximação de Tustin, seria o seguinte:

```
%início da rotina PID
y = medida_saída
erro = ref - y
P = K*erro
I = I_ant + K*T*(erro+erro_ant)/(2*T_i)
D = D_ant*(2-p*T)/(2+p*T) +
    + 2*p*K*T_d/(2+p*T)*(erro-erro_ant)
sinal_controle = P + I + D
erro_ant = erro
I_ant = I
D_ant = D
%fim da rotina PID
```

Sistemas de controle

Capítulo 3

Ajuste de controladores PID

3.1 Introdução

A fim de obter o ajuste ótimo de um controlador para um dado processo, é necessário conhecer o comportamento do processo, tanto do ponto de vista estacionário quanto do ponto de vista transitório. Somente utilizando essa informação será possível determinar a maneira adequada de agir sobre o processo de modo a obter um desempenho satisfatório do sistema de controle. A forma mais acurada de descrever o comportamento de um processo consiste em um modelo matemático, e a obtenção de tais modelos será objeto do Capítulo 4.

Um conceito fundamental no ajuste de controladores em geral e de controladores PID em particular diz respeito à exatidão e complexidade do modelo: *o desempenho obtível de um sistema de controle é tão melhor quanto mais preciso for o modelo disponível para o processo.*

Como consequência, todo método de ajuste de controladores PID divide-se em duas etapas, a saber:

- 1) obtenção de um modelo para o processo;
- 2) cálculo dos parâmetros do PID a partir do modelo obtido.

Pode-se identificar dois casos extremos no que diz respeito à modelagem: aquele em que nenhum modelo para o processo é utilizado

e aquele em que o comportamento do processo é perfeitamente conhecido. No caso em que não há informação alguma a respeito do comportamento do processo, o projeto somente pode ser efetuado por tentativa e erro. Esse procedimento pode ser extremamente trabalhoso e mesmo engenheiros experientes costumam ter dificuldades em ajustar controladores PID dessa forma até para os processos mais simples. O fracasso neste procedimento é comum, o que freqüentemente leva ao desligamento dos controladores e conseqüente operação em modo manual, com prejuízos significativos para o processo produtivo.

No outro extremo temos o caso de um modelo completo, isto é, o caso em que se pode prever com precisão o comportamento do processo para qualquer condição de operação admissível e qualquer entrada e perturbação viáveis. Essa informação é fornecida por um modelo matemático detalhado. Nesse caso o procedimento de cálculo dos parâmetros do controlador é sistemático e usualmente simples. Além disso, é possível otimizar o desempenho do sistema. Por outro lado, a obtenção de um tal modelo matemático pode ser bastante custosa.

Em muitos casos, desempenho satisfatório pode ser obtido a partir de um nível modesto de informação sobre o comportamento do processo, cujo custo de obtenção é baixo. Essa informação pode se apresentar sob a forma de um modelo matemático simplificado ou simplesmente de um número reduzido de características fundamentais do processo. Neste capítulo serão apresentados métodos que utilizam, no lugar de um modelo matemático para o processo, estas características fundamentais sobre o seu comportamento como base para o cálculo dos parâmetros de controladores PID.

O *método da resposta ao salto* é baseado no conhecimento de duas ou três grandezas que caracterizam a resposta do processo a um salto aplicado em sua variável manipulada. A determinação dessas grandezas exige a realização de um ensaio *em malha aberta*. Já o *método do ponto crítico* exige o conhecimento de duas grandezas características da resposta em freqüência do processo. Essas grandezas podem ser determinadas por meio de um ensaio do processo *em malha fechada*. Uma vez obtidas estas informações, basta recorrer a fórmulas simples para calcular os ganhos do controlador. Essas fórmulas foram determinadas de maneira empírica por meio de ensaios de processos industriais típicos (Åström; Hägglund (1995); Ziegler; Nichols (1942);

Levine (1996)).

3.2 Método da resposta ao salto

Considere um processo sendo submetido a um salto *unitário* em sua entrada, isto é, na variável manipulada. A resposta típica de um processo industrial a esta excitação é da forma apresentada na Figura 3.1.

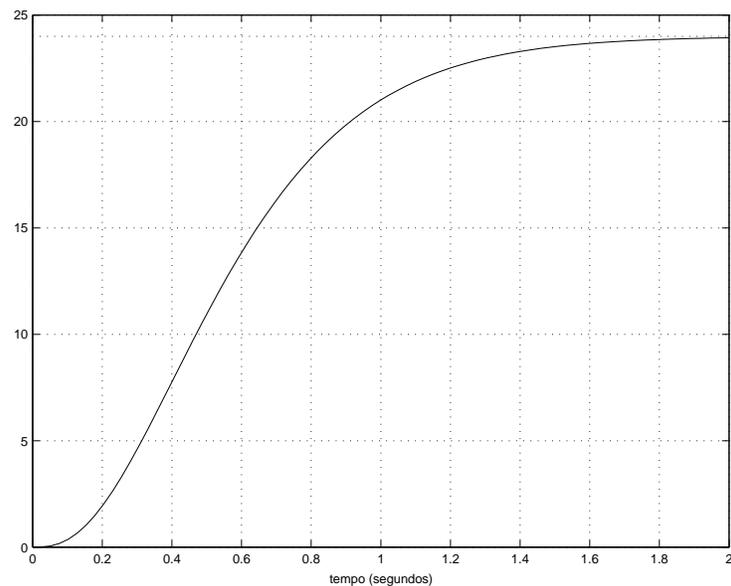


Figura 3.1 - Resposta típica de um processo a um salto unitário em sua variável manipulada (ensaio em malha aberta)

Essa resposta pode ser caracterizada por três parâmetros: o *atraso aparente* L , o *ganho integral equivalente* a e a *constante de tempo dominante* T . Esses parâmetros representam o modelo do processo a ser utilizado neste método de ajuste. O atraso aparente e o ganho integral equivalente são definidos como segue. São traçados eixos coordenados tomando como referência no eixo das abscissas o instante de tempo em

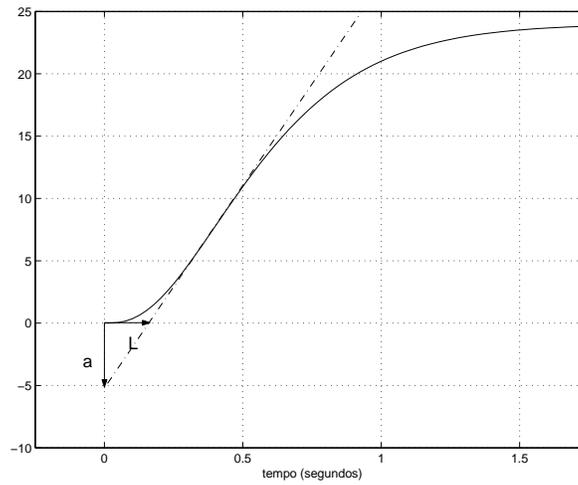


Figura 3.2 - Características da resposta ao salto de um processo

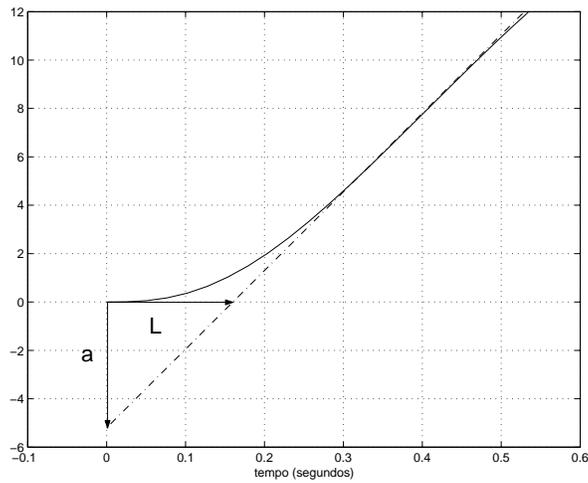


Figura 3.3 - Características da resposta ao salto de um processo

Capítulo 3 Ajuste de controladores PID

que foi aplicado o salto e no eixo das ordenadas o valor da variável de processo antes deste mesmo instante. Em seguida é traçada uma reta tangente à curva de resposta no seu ponto de inflexão, ou seja, o ponto em que a taxa de variação da resposta é máxima. Os parâmetros a e L são dados então pela interseção dessa reta com os eixos coordenados anteriormente definidos, conforme indicado na Figura 3.2. Um detalhe dessa figura é mostrado na Figura 3.3 para melhor visualização dessas grandezas. Um salto de amplitude diferente da unidade pode ser usado, sendo neste caso necessário normalizar o ganho integral equivalente dividindo-o pela amplitude deste salto.

A constante de tempo dominante T , por sua vez, é definida na teoria de sistemas lineares como o tempo que a variável de processo demora para atingir 63% de sua variação total, passado o tempo do atraso aparente (ver Apêndice A). O valor de T pode ser determinado da curva de resposta do sistema por sua própria definição.

Por essas definições são obtidas, no exemplo apresentado nas Figuras 3.2 e 3.3, as seguintes medidas: $L = 0,16$ s e $a = 5,2$. A variável de processo atinge uma variação igual a 24 em regime permanente, atingindo o valor de 15,1 (63% do valor de regime permanente) no instante $t = 0,65$ s. Logo a constante de tempo dominante é dada por $T = 0,65$ s – $L = 0,49$ s.

A primeira etapa do ajuste, que constitui a obtenção de um modelo para o processo, fica nesse caso reduzida a este ensaio e à determinação dessas características de sua resposta ao salto. Uma vez realizadas essas medidas, está completa a primeira etapa do ajuste. O cálculo dos parâmetros do PID é então feito em função destas características fundamentais determinadas para o processo aplicando-se uma fórmula para cada um dos parâmetros do PID. Esse método foi proposto pela primeira vez em Ziegler; Nichols (1942), quando foram propostas as fórmulas apresentadas na Tabela 3.1 para o cálculo dos parâmetros do controlador a partir de a e L apenas, sem utilizar a constante de tempo dominante T .

Embora esse método de ajuste não exija a obtenção de um modelo matemático para o processo, sua concepção está baseada na análise do modelo matemático mais simples que forneceria uma resposta de forma similar àquela apresentada na Figura 3.2. Esse modelo é uma função

Tabela 3.1 - Tabela de Ziegler-Nichols para o método da resposta ao salto

Tipo de controlador	K	T_i	T_d
P	$\frac{1}{a}$	—	—
PI	$\frac{0,9}{a}$	$3L$	—
PID	$\frac{1,2}{a}$	$2L$	$\frac{L}{2}$

de transferência de ordem 1 acrescida de um atraso de transporte:

$$G(s) = e^{-Ls} \frac{K}{Ts + 1} \quad (3.1)$$

onde L é o atraso aparente determinado anteriormente, T é a constante de tempo dominante e o ganho integral equivalente a está relacionado com os parâmetros do modelo (3.1) por:

$$a \approx \frac{KL}{T}$$

As fórmulas nesta tabela foram determinadas combinando a análise deste modelo matemático e resultados empíricos obtidos de grande número de experimentos em processos industriais típicos. O requisito de desempenho buscado na determinação dessas fórmulas foi a obtenção de comportamento transitório bem amortecido em resposta a perturbações. Por outro lado, esse amortecimento muitas vezes não é satisfatório na resposta a variações de referência, levando a uma sobrepassagem excessiva e baixa tolerância a variações na dinâmica do processo.

Exemplo 3.1 Aplicação do método da resposta ao salto com as fórmulas de Ziegler-Nichols a um processo térmico, descrito no Apêndice B, seção B.1.

O processo está inicialmente em repouso, isto é, a resistência que o aquece está desligada. A temperatura do processo é inicialmente igual

Capítulo 3 Ajuste de controladores PID

à temperatura ambiente, de 22°C . A fim de ajustar um PID para esse processo é aplicado no instante $t = 0$ um salto de 10% na potência (variável manipulada). Na Figura 3.4 é apresentada a resposta do processo a esta excitação. Na Figura 3.5 essa resposta pode ser vista em maior detalhe, indicando ali o traçado da reta tangente no ponto de inflexão e a determinação gráfica do atraso aparente L e do ganho integral equivalente a :

$$L = 10 \text{ s} \quad a = 0,45 \frac{^{\circ}\text{C}}{\%}$$

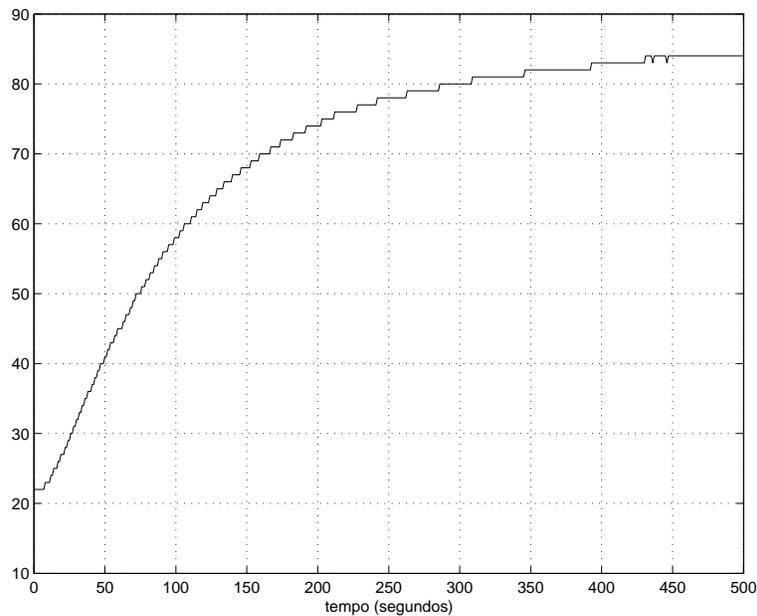


Figura 3.4 - Ensaio de resposta ao salto em malha aberta para o processo 1

Note que o parâmetro “ a ” foi determinado dividindo o valor obtido graficamente ($4,5^{\circ}\text{C}$ pela amplitude do salto (10%). Aplicando as fórmulas da Tabela 3.1, os ganhos do PID são calculados como:

$$K = 2,7\%/^{\circ}\text{C} \quad T_i = 20 \text{ s} \quad T_d = 5 \text{ s}$$

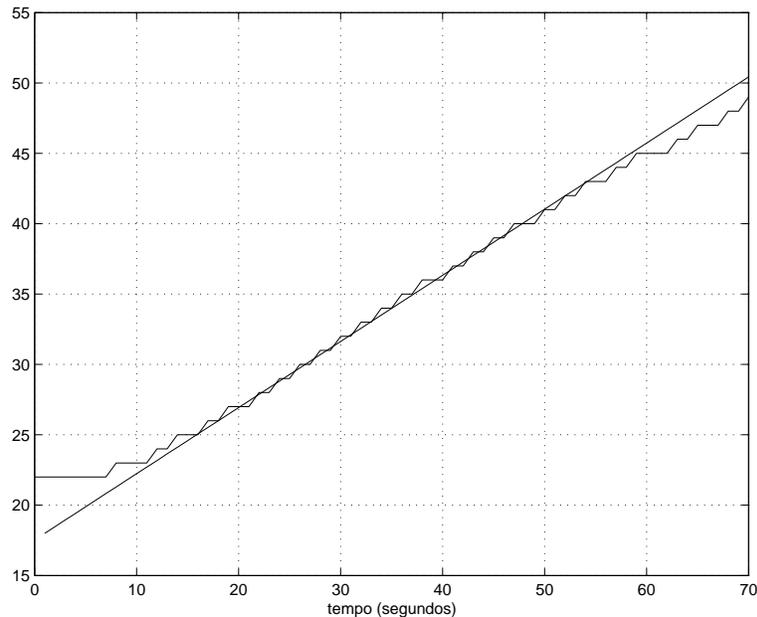


Figura 3.5 - Determinação do ganho integral equivalente e do atraso aparente para o processo 1

O laço de controle é então fechado com o PID assim ajustado e um ensaio é efetuado para verificar a adequação do ajuste. O ensaio consiste de um salto na referência para o valor de 130°C , seguido da aplicação de uma perturbação persistente (a ventilação é ligada). O resultado é apresentado na Figura 3.6. A resposta à perturbação apresenta bom desempenho transitório, porém a resposta à variação de referência é oscilatória, com sobrepassagem acentuada.

A prática industrial indica que a tabela de Ziegler-Nichols costuma fornecer resultados satisfatórios quando $0,1 < L/T < 0,6$. Para outros casos, foram posteriormente propostas outras fórmulas, por vezes utilizando o terceiro parâmetro da resposta ao salto: a constante de tempo dominante T .

Capítulo 3 Ajuste de controladores PID

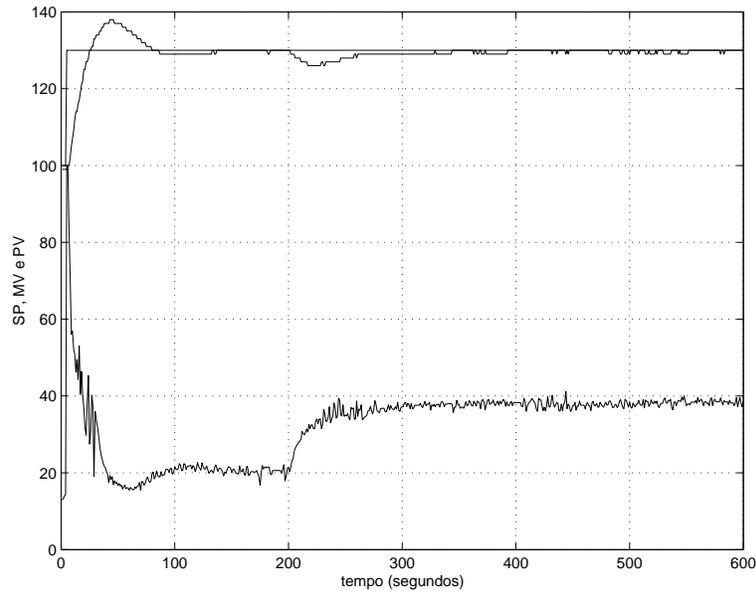


Figura 3.6 - Resposta do processo 1 controlado por PID com o ajuste obtido pelo método da resposta ao salto e as fórmulas de Ziegler-Nichols, mostrando referência (SP), controle (MV) e variável de processo (PV)

As fórmulas propostas por Chien, Hrones e Reswick (CHR), por exemplo, visam obter o mínimo tempo de estabilização com um dado sobrepasso. Foram propostas fórmulas distintas para sobrepasso de 20% e sobrepasso nulo. Também foram propostas fórmulas distintas para otimizar separadamente a resposta do sistema à referência e à perturbação, totalizando quatro conjuntos de fórmulas de ajuste. Essas fórmulas são apresentadas nas Tabelas 3.2 e 3.3. Note que a constante de tempo dominante somente é utilizada para o ajuste visando a otimização da resposta à referência.

Tabela 3.2 - Tabela de Chien, Hrones e Reswick para o método da resposta ao salto, otimização da resposta à referência

Sobrepasso	0%			20%		
Tipo de controlador	K	T_i	T_d	K	T_i	T_d
P	$\frac{0,3}{a}$	—	—	$\frac{0,7}{a}$	—	—
PI	$\frac{0,35}{a}$	$1, 2T$	—	$\frac{0,6}{a}$	T	—
PID	$\frac{0,6}{a}$	T	$0, 5L$	$\frac{0,95}{a}$	$1, 4T$	$0, 47L$

Tabela 3.3 - Tabela de Chien, Hrones e Reswick para o método da resposta ao salto, otimização da resposta à perturbação

Sobrepasso	0%			20%		
Tipo de controlador	K	T_i	T_d	K	T_i	T_d
P	$\frac{0,3}{a}$	—	—	$\frac{0,7}{a}$	—	—
PI	$\frac{0,6}{a}$	$4L$	—	$\frac{0,7}{a}$	$2, 3L$	—
PID	$\frac{0,95}{a}$	$2, 4L$	$0, 42L$	$\frac{1,2}{a}$	$2L$	$0, 42L$

Capítulo 3 Ajuste de controladores PID

O método da resposta ao salto consiste, portanto, dos seguintes passos:

- 1) Ensaio
 - 1.1) registrar a resposta do processo a um salto em sua entrada;
 - 1.2) encontrar o instante de tempo em que a taxa de variação da saída atinge o seu valor máximo;
 - 1.3) traçar uma reta tangente à curva de resposta neste instante de tempo;
 - 1.4) determinar o atraso aparente e o ganho integral equivalente graficamente e, se necessário, a constante de tempo dominante.
- 2) Cálculo dos parâmetros - consultar a Tabela 3.1, 3.2 ou 3.3.

Está claro que este método se limita a processos cuja resposta pode ser aproximada pela forma da Figura 3.2. Dentre as classes de processos costumeiramente encontradas na indústria, aquelas que mais tipicamente se enquadram neste padrão são os processos de controle de nível de líquidos e os processos térmicos. Outras classes de processos igualmente comuns na indústria não costumam apresentar uma resposta da forma mostrada na Figura 3.2 e, portanto, este método, em geral, não é adequado para o ajuste de seus controladores PID. Por exemplo, alguns processos eletromecânicos (motores e geradores elétricos, e robôs industriais, por exemplo) costumam apresentar comportamento naturalmente oscilatório, de forma que sua resposta ao salto é bastante distinta da forma requerida para a aplicação do método. Já processos de controle de vazão por vezes têm fase não-mínima (zeros com parte real positiva em sua função de transferência), o que leva a resposta ao salto a uma oscilação inicial conhecida como “resposta inversa”. Finalmente, o controle de posição de motores apresenta comportamento integrador, isto é, a resposta a um salto cresce indefinidamente com o tempo.

Por outro lado, o método baseia-se em identificação de formas de onda, o que pode ser problemático na prática, particularmente em aplicações com baixa relação sinal-ruído. Ainda assim, esse método

é adequado para grande número de processos industriais e continua sendo largamente aplicado na indústria.

3.3 Método do ponto crítico

3.3.1 Fundamentos

Considere um processo operando em malha fechada, controlado por controle puramente proporcional como na Figura 3.7. Se o ganho do controlador é aumentado progressiva e lentamente, a certa altura o sistema passará a apresentar uma oscilação sustentada. O mínimo valor do ganho do controlador proporcional para o qual essa oscilação surge é chamado *ganho crítico* do processo (K_c); o período da oscilação observada é dito o *período crítico* do processo (T_c). Essas são duas características fundamentais de um processo, que representam um ponto de sua resposta em frequência - o ponto crítico. Os ajustes de um PID para o processo podem ser feitos em função dessas características, de maneira similar ao método da resposta ao salto, aplicando fórmulas que relacionam os parâmetros do PID com os valores obtidos para estas grandezas.

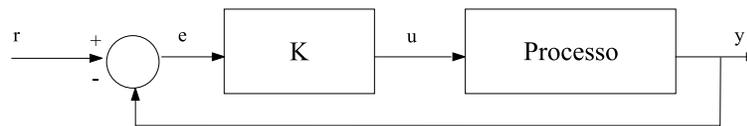


Figura 3.7 - Processo sob controle proporcional - definição do ponto crítico de um processo

A fase de modelagem, nesse caso, consiste em realizar um ensaio com o processo operando em laço fechado com controle proporcional. Se o ganho proporcional é inicialmente bastante pequeno, então o sistema não oscilará. O valor do ganho pode então ser aumentado lentamente até que uma oscilação seja observada. O projeto, como no método da resposta ao salto, resume-se a consultar as tabelas correspondentes. A Tabela 3.4 apresenta as fórmulas originalmente propostas por Ziegler e Nichols.

Tabela 3.4 - Fórmulas de Ziegler e Nichols para ajuste pelo método do ponto crítico

Tipo de controlador	K	T_i	T_d
P	$0,5K_c$	—	—
PI	$0,4K_c$	$0,8T_c$	—
PID	$0,6K_c$	$0,5T_c$	$0,125T_c$

Este método pode ser diretamente aplicado a uma classe de sistemas para os quais o método da resposta ao salto não é adequado, pois, ao contrário deste, sua formulação não está baseada em uma resposta típica do processo. Por outro lado, este método é menos sensível ao efeito de ruído do que o método da resposta ao salto.

3.3.2 Ensaio com controle *bang-bang*

A determinação do ganho crítico e do período crítico de um processo pelo ensaio com controle proporcional é pouco eficiente por diversos motivos. Primeiramente, uma vez que o ganho deve ser aumentado de forma gradativa, o procedimento torna-se bastante demorado. Em segundo lugar, é preciso ter de antemão alguma informação sobre o processo, a fim de determinar o valor inicial do ganho e sua taxa de variação. Finalmente, não se tem controle sobre a amplitude da oscilação observada na saída, que pode ser bastante pronunciada, o que desencoraja sua aplicação *on-line*. Uma maneira mais eficiente de determinar o ganho e período críticos é o ensaio em malha fechada com controle *bang-bang*, que não sofre de nenhum dos inconvenientes citados.

Como apresentado no Capítulo 1, em um processo com controle *bang-bang*, a variável controlada oscila em torno do valor da referência e a variável manipulada chaveia periodicamente entre seus dois valores possíveis. As características dessa oscilação dependem das características do processo, mas também dos valores \bar{u} e \underline{u} escolhidos para o controle *bang-bang*.

Uma primeira característica da oscilação a ser analisada é sua sime-

tria. Por simetria entende-se a relação entre os tempos em que a variável manipulada fica em seu valor máximo e mínimo: a oscilação é simétrica se esses tempos são iguais. Nesse caso a oscilação da variável controlada será também simétrica com relação ao valor da referência. Se essa oscilação é simétrica, então seu período é igual ao período crítico do processo e o ganho crítico pode ser calculado pela expressão (Franklin; Powell; Naeini (1994); Ogatta (1993); Åström; Hägglund (1995))

$$K_c = \frac{4d}{\pi A} \quad (3.2)$$

onde $d = \bar{u} - \underline{u}$ e A é a amplitude pico-a-pico da oscilação observada na variável controlada.

Exemplo 3.2 Considere um processo operando em laço fechado com controle *bang-bang*, conforme a Figura 3.8, sendo $\bar{u} = 1$ e $\underline{u} = 0,6$, e com uma referência $r = 2$. Na Figura 3.9 é apresentada a evolução da variável manipulada e da variável controlada.

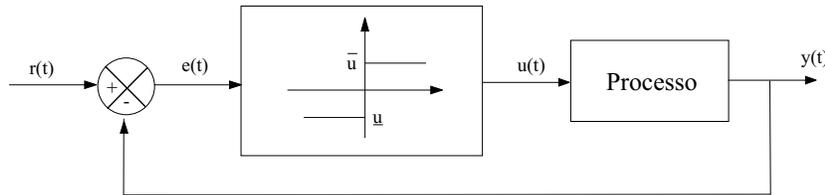


Figura 3.8 - Processo com controle *bang-bang*

Note que a oscilação é simétrica. Então o período crítico é imediatamente identificado como $T_c = 1,3$ s. A amplitude pico-a-pico da oscilação observada é de $A = 0,38$ e o ganho crítico pode ser determinado pela equação (3.2), resultando em $K_c \approx 1,3$.

Se a amplitude de variação da variável manipulada é reduzida para $\bar{u} = 1,2$ e $\underline{u} = 0,4$, então obtém-se o comportamento da Figura 3.10.

O período da oscilação é o mesmo e a amplitude da oscilação agora é de aproximadamente $A = 0,77$, que conduz ao mesmo ganho crítico.

Capítulo 3 Ajuste de controladores PID

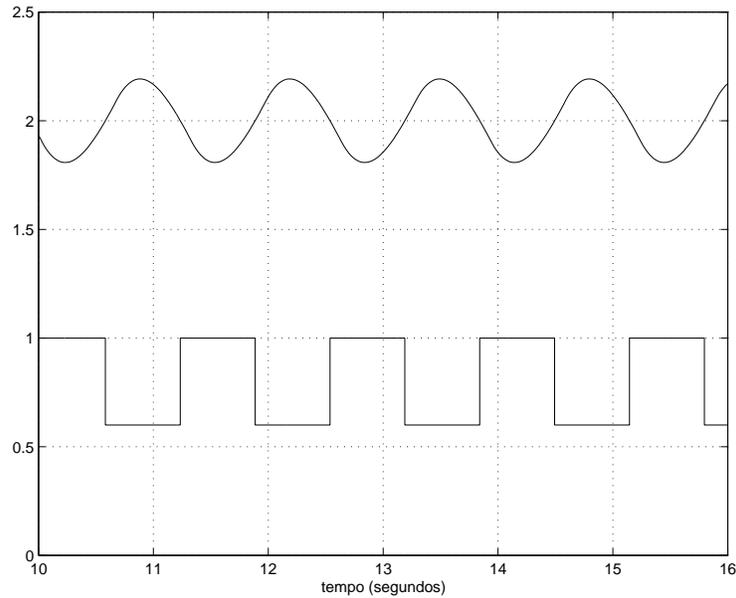


Figura 3.9 - Simulação do processo com controle *bang-bang*, $\bar{u} = 1,0$ e $\underline{u} = 0,6$

A simetria da oscilação depende exclusivamente do valor médio da variável manipulada (β):

$$\beta = \frac{\bar{u} + \underline{u}}{2}$$

Para que a oscilação seja simétrica, o valor médio da variável manipulada deve ser tal que o valor médio da variável controlada seja igual à referência. Os valores \bar{u} e \underline{u} devem ser determinados de forma a satisfazer essa restrição. Se o valor médio da variável manipulada (β) não tiver o valor correto, o sistema oscilará de forma assimétrica ou mesmo não oscilará. Nesse caso, β deve ser recalculado, o que pode ser feito da forma apresentada no próximo exemplo.⁵

⁵O valor de β poderia ser calculado diretamente se fosse conhecido o ganho estático

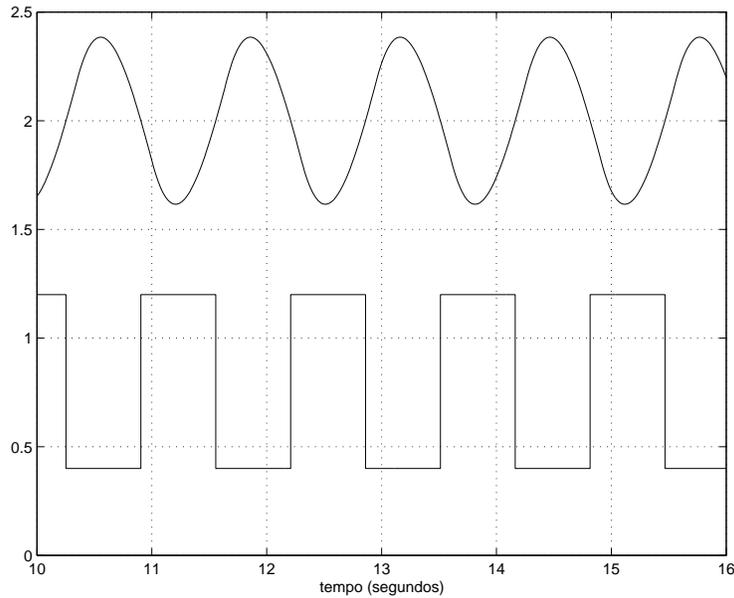


Figura 3.10 - Simulação do processo com controle *bang-bang*, $\bar{u} = 1,2$ e $\underline{u} = 0,4$

Exemplo 3.3 O processo térmico descrito no Apêndice B, seção B.1 é colocado, com referência igual a 100°C , sob controle *bang-bang* com $\bar{u} = 100\%$ e $\underline{u} = 0$ (isto é, controle liga-desliga), obtendo-se as medidas apresentadas na Figura 3.11, onde são apresentadas as variáveis de referência (SP), de controle (MV) e de processo (PV).

A oscilação observada é assimétrica, logo a tendência da variável manipulada deve ser corrigida. Essa correção pode ser feita pela fórmula:

$$\beta_{novo} = \beta_{velho} + \gamma \frac{t_{alto} - t_{baixo}}{t_{alto} + t_{baixo}} \quad (3.3)$$

onde t_{alto} e t_{baixo} são os tempos que a variável manipulada permanece

do processo $G(0)$, pela expressão $\beta = \frac{r}{G(0)}$. Porém o conhecimento deste valor exigiria a realização de pelo menos um ensaio adicional no processo.

Capítulo 3 Ajuste de controladores PID

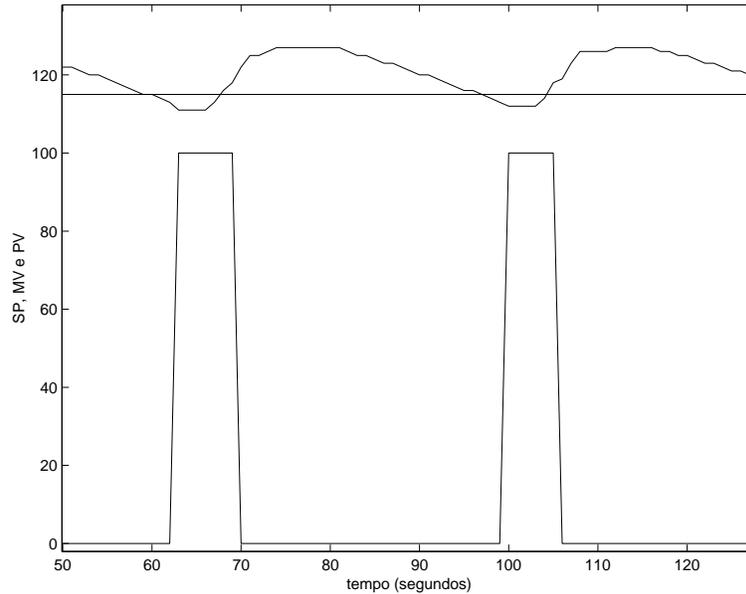


Figura 3.11 - Ensaio com controle liga-desliga com referência igual a 115°C - oscilação assimétrica

em seu valor alto (\bar{u}) e baixo (\underline{u}) respectivamente, e γ é um ganho, determinado empiricamente. Nesse caso mede-se $t_{alto} = 7$ s e $t_{baixo} = 30$ s e, usando $\gamma = 14\%$, o novo valor de β é calculado como $\beta = 40\%$. Este procedimento de ajuste do valor da tendência deve ser repetido até que a oscilação possa ser considerada simétrica dentro de uma tolerância razoável. Adotamos aqui o critério:

$$\frac{t_{alto} - t_{baixo}}{t_{alto} + t_{baixo}} < 0,1$$

A Figura 3.12 apresenta o resultado desse procedimento iterativo de ajuste da tendência.

Os valores de tendência foram atualizados várias vezes até ser obtida uma oscilação simétrica em torno da referência. Conforme pode ser melhor visualizado na Figura 3.13, onde é apresentado um detalhe da Figura 3.12, o período da oscilação simétrica resultante é $T_c = 40$ s

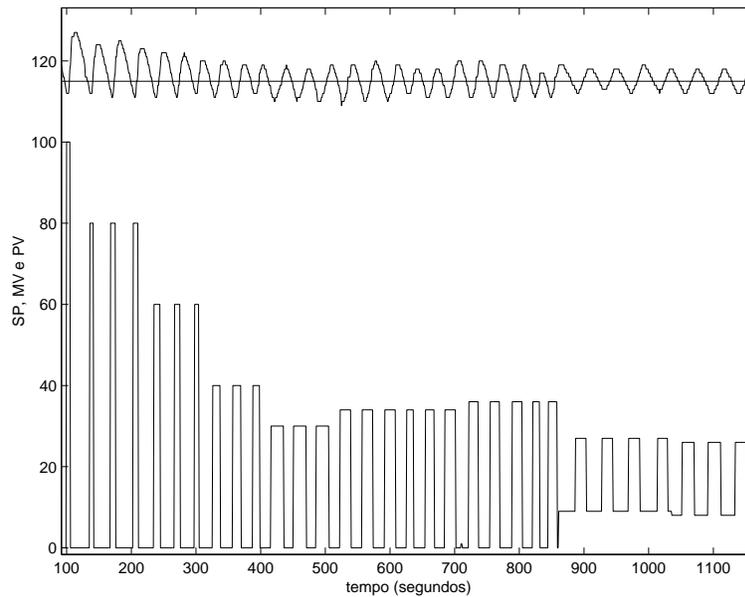


Figura 3.12 - Ensaio com controle *bang-bang* mostrando ajuste de tendência até obtenção de oscilação simétrica

e sua amplitude pico-a-pico é $A = 6^{\circ}\text{C}$. Então, o ganho crítico pode ser calculado pela equação (3.2), resultando $K_c = 3,82 \frac{\%}{^{\circ}\text{C}}$.

Consultando a Tabela 3.4 obtém-se os seguintes valores:

$$K = 2,3 \frac{\%}{^{\circ}\text{C}} \quad T_i = 20 \text{ s} \quad T_d = 5 \text{ s}$$

Note que esse ajuste é quase igual àquele obtido pelo método da resposta ao salto com o ajuste de Ziegler e Nichols (exemplo 3.1), logo o desempenho em laço fechado será o mesmo obtido naquele caso. A obtenção de ajustes aproximadamente iguais pelos dois métodos é esperada, uma vez que as Tabelas 3.1 e 3.4 foram obtidas a partir dos mesmos critérios, embora utilizando informações diferentes sobre o processo. Entretanto essa coincidência não acontecerá para todos os processos.

Capítulo 3 Ajuste de controladores PID

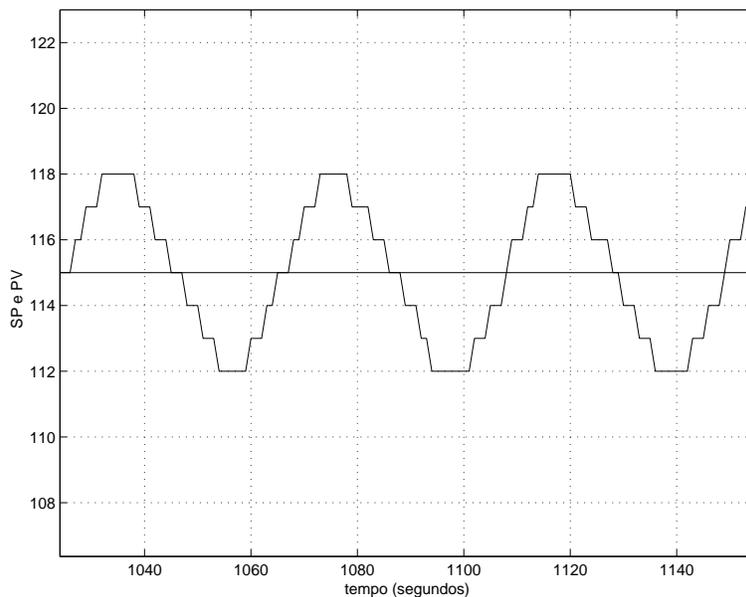


Figura 3.13 - Ensaio com controle *bang-bang* - oscilação simétrica

Na prática, a lógica de controle *bang-bang* muitas vezes deve ser dotada de histerese, a fim de evitar que ocorra chaveamento devido ao ruído de medição, assim como descrito no Capítulo 1. A largura da histerese deve ser escolhida maior do que o nível de ruído de medição presente no sistema. Nesse caso, pode-se demonstrar pelo método da função descritiva que o período desta oscilação é aproximadamente igual ao período crítico e que o ganho crítico pode ser calculado por:

$$K_c = \frac{4d}{\pi\sqrt{A^2 - \epsilon^2}} \quad (3.4)$$

onde ϵ é a faixa de histerese.

Note que o ensaio com controle *bang-bang* é feito em malha fechada e que durante este ensaio a saída oscila em torno do valor da referência. Portanto, o ensaio pode ser feito com o processo em operação, sem a necessidade de interromper a produção. Deve-se tomar o cuidado de escolher uma amplitude para a variação da variável manipulada que

seja suficientemente pequena para não causar oscilações excessivas na variável de processo, de forma que o processo possa ser mantido em operação. Por outro lado, a oscilação na variável de processo deve ser suficientemente grande para permitir uma medida confiável de sua amplitude.

O método de ajuste do *ponto crítico* consiste, portanto, dos seguintes passos:

- 1) Ensaio
 - 1.1) colocar o sistema em laço fechado com controle *bang-bang* a fim de provocar uma oscilação simétrica;
 - 1.1.1) escolher ϵ maior do que o nível de ruído;
 - 1.1.2) escolher valores para \bar{u} e \underline{u} ;
 - 1.1.3) se necessário, corrigir o valor de tendência modificando \bar{u} e \underline{u} até obter uma oscilação simétrica;
 - 1.2) medir a amplitude e a frequência da oscilação resultante;
 - 1.3) calcular o *ganho crítico* como em (3.4).
- 2) Cálculo dos parâmetros do PID - consultar a Tabela 3.4 ou outra tabela similar.

3.4 Conclusão

Cada um dos métodos discutidos apresenta vantagens e desvantagens, tendo seus campos de aplicação definidos em função destas. O método da resposta ao salto é simples e direto, baseado em informações que podem ser obtidas para qualquer processo em modo manual, no entanto é pouco preciso devido à sua sensibilidade a ruídos e seu caráter gráfico. Se comparado com o método da resposta ao salto, o método do ponto crítico é aplicável a uma classe mais ampla de processos e pode ser levado a efeito com o processo em operação. Porém, a implementação do ensaio com controle *bang-bang* no qual esse método está baseado pode se mostrar um pouco mais complexa.

Os ajustes obtidos a partir destes ensaios simples são muitas vezes suficientes para processos industriais, no entanto existem aplicações em

que maior robustez e/ou desempenho são exigidos. Nesses casos é preciso basear o ajuste em uma maior quantidade de informação sobre o processo. Essa informação deve ser dada por um modelo matemático, usualmente na forma de uma função de transferência. A obtenção de tais modelos requer certo grau de conhecimento teórico e pode ser trabalhosa, ao contrário dos métodos não baseados em modelos, nos quais o esforço de ajuste se resume à realização dos ensaios já descritos e aplicação simples de fórmulas prontas. Por outro lado, o desempenho que pode ser obtido por um projeto criterioso utilizando modelos matemáticos é bastante superior àquele obtido por meio dos outros métodos.

3.5 Exercícios

- 1) Para quais tipos de sistemas o método de Ziegler e Nichols da resposta ao salto não é apropriado?
- 2) Por que é vantajosa a identificação das grandezas críticas (ganho crítico e frequência crítica) utilizando o ensaio com controle *bang-bang*, quando comparada com a identificação dessas grandezas por meio de ensaio com controle proporcional?
- 3) Considerando-se um tanque de acumulação, aplicou-se um salto de $2 V$ na válvula que controla a entrada de líquido no tanque. A evolução da altura do líquido no tanque com o tempo foi medida, obtendo-se o resultado apresentado na Figura 3.14.
 - a) Use a tabela de Chien para determinar um controlador do tipo P de forma que o tempo de subida do sistema em malha fechada seja o menor possível. Quanto será o valor do erro em regime permanente para uma referência constante igual a 3? Justifique com base nos dados do ensaio.
 - b) Use a tabela de Chien para determinar um controlador do tipo PID de forma que a resposta do sistema em malha fechada seja a mais amortecida possível. Quanto será o valor do sinal de controle $v(t)$ em regime permanente? Justifique com base nos dados do ensaio.

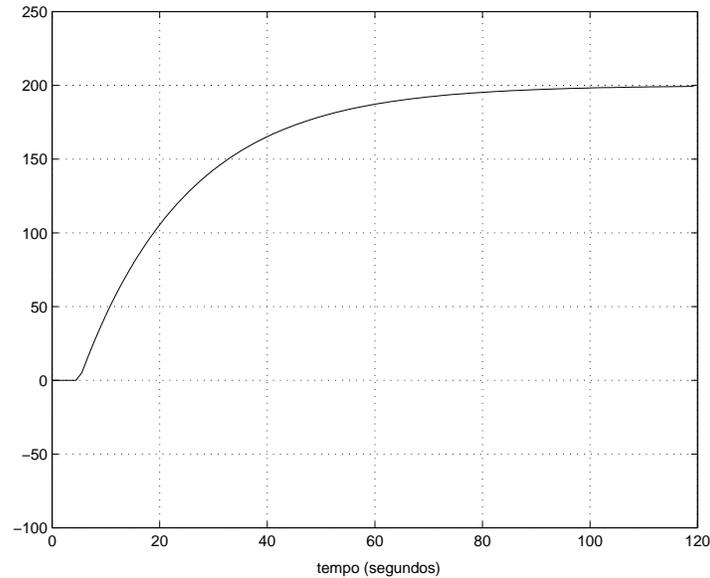


Figura 3.14 - Nível de um tanque em resposta à variação de abertura de sua válvula de admissão

- c) Supondo que o processo (tanque + válvula de controle + tubulação) possa ser modelado pela seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{h(s)}{v(s)} = \frac{K_{pl}e^{-L_a s}}{(s + p)}$$

onde $v(t)$ é a tensão aplicada na válvula de controle e $h(t)$ é altura do tanque, determine K_{pl} , L_a e p com base no ensaio realizado.

- 4) Considere o sistema de controle dado na Figura 3.15, com $r(t) = 1 \forall t \geq 0$, $h = 0, 1$, $M = 1$.
- a) A Figura 3.16 mostra a saída do sistema para um dado valor de V_{bias} . Desejando-se que a oscilação seja simétrica com

Capítulo 3 Ajuste de controladores PID

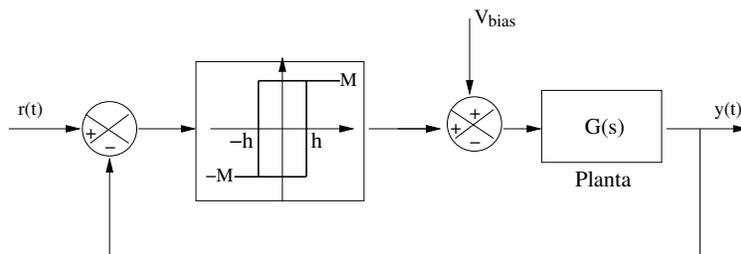


Figura 3.15 - Controle *bang-bang*

- relação à referência, você aumentaria ou diminuiria V_{bias} ? Justifique.
- b) A Figura 3.17 mostra a saída do sistema para o caso em que V_{bias} foi ajustado para obter-se uma oscilação simétrica com relação à referência. Sabendo-se que o ganho estático da planta vale 10, quanto vale V_{bias} nesse caso?
 - c) Com base no ensaio da Figura 3.17, obtenha os parâmetros de um controlador PID a partir da tabela de Ziegler e Nichols.
- 5) Considere o ensaio de resposta ao salto na variável manipulada ilustrado na Figura 3.18, realizado para um determinado processo industrial.
 - a) Com base no ensaio, determine os parâmetros para sintonia de um controlador PID pelo método da resposta ao salto utilizando a tabela de Chien. Escolha os parâmetros de forma a minimizar o sobrepasso.
 - b) Obtenha um modelo aproximado de primeira ordem para este sistema que seja válido para a operação próxima a $y = 25$.
 - 6) Uma variação de amplitude foi aplicada à variável manipulada (MV) de um processo. A resposta observada na variável de processo (PV) foi registrada e é apresentada na Figura 3.19, juntamente com a variável manipulada.

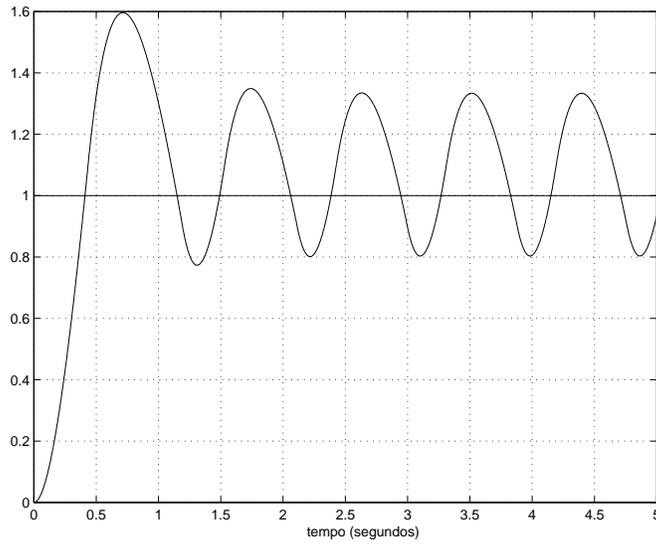


Figura 3.16 - Oscilação assimétrica com controle *bang-bang*

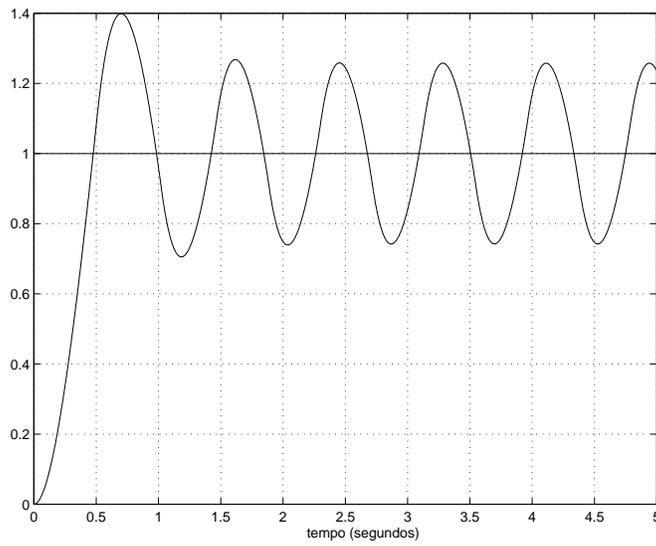


Figura 3.17 - Oscilação simétrica com controle *bang-bang*

Capítulo 3 Ajuste de controladores PID

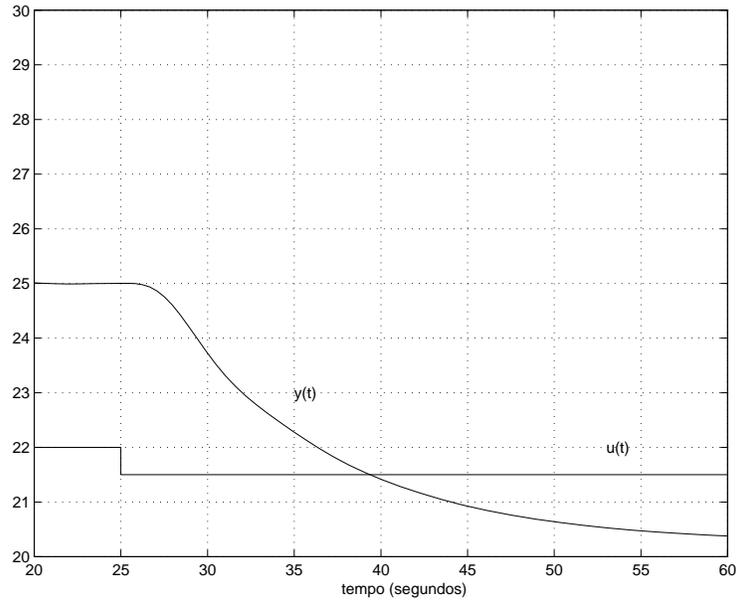


Figura 3.18 - Resposta ao salto de um processo industrial

Pergunta-se:

- a) Quanto vale o ganho estático do processo?
 - b) Quanto vale o atraso aparente do processo?
 - c) Quanto vale a constante de tempo dominante do processo?
 - d) Ajuste os parâmetros de um PID para este processo pelo método de Ziegler e Nichols da resposta ao salto; escreva a função de transferência do PID ajustado.
- 7) Um processo controlado por um PID implementado na forma paralela apresenta comportamento oscilatório levemente acima do aceitável. Deseja-se fazer um ajuste fino manual para reduzir este problema. Quais devem ser as alterações nos ganhos K , T_i e T_d do controlador?

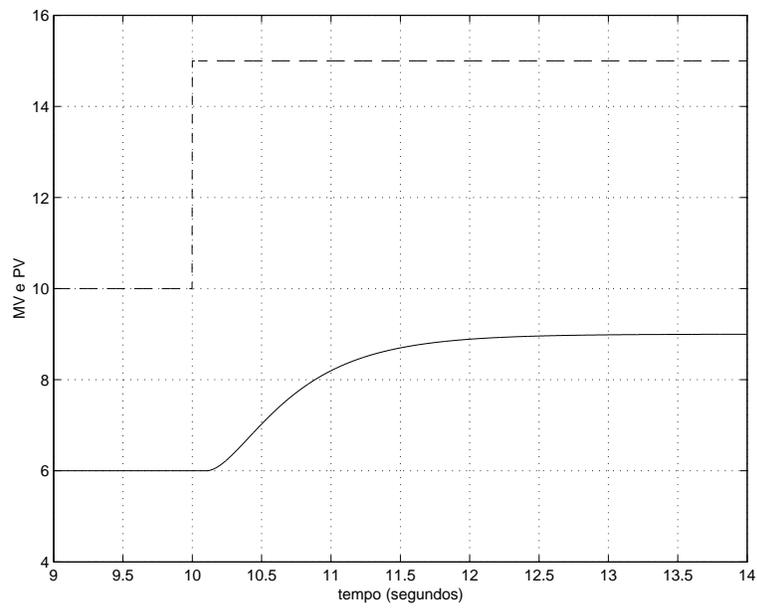


Figura 3.19 - Entrada (linha pontilhada) e saída (linha contínua) do processo para o problema 6

Capítulo 4

Modelagem de processos

4.1 Introdução

No capítulo anterior foram vistos métodos de ajuste de controladores PID baseados em características elementares do comportamento do processo. Essas informações podem ser obtidas por meio de ensaios relativamente simples e são muitas vezes suficientes para realizar um ajuste adequado em termos de robustez e desempenho para processos com comportamento típico. Porém, esses métodos são aplicáveis somente à particular estrutura dos controladores PID, não havendo paralelo para controladores com outras estruturas. Por outro lado, esses métodos de ajuste são muitas vezes insuficientes mesmo para o ajuste de controladores PID, seja porque o comportamento do processo foge aos padrões típicos assumidos na concepção destes métodos, seja porque os requisitos de desempenho e robustez são mais rigorosos. Nesses casos a obtenção de um ajuste adequado para o controlador exige mais informação sobre o processo, e torna-se necessária a obtenção de um modelo matemático. Por outro lado, modelos matemáticos são também necessários para a realização de simulações, que constituem uma importante etapa do projeto de um sistema de controle.

Neste capítulo será discutida a modelagem de processos, ou seja, princípios teóricos e procedimentos para a obtenção de tais modelos. Serão apresentados os princípios básicos para modelagem e obtidos

modelos para algumas classes de processos largamente encontrados na indústria. Inicialmente vamos definir mais precisamente o que entendemos por um modelo matemático de um processo.

Modelo matemático - um modelo matemático de um processo é uma equação - ou conjunto de equações - cuja solução representa uma aproximação para o seu comportamento.

De posse de um modelo matemático para um processo, é possível resolver as equações que o compõem, determinando assim qual será o comportamento do processo sob diferentes condições. As principais finalidades de um modelo matemático no contexto de projeto de sistemas de controle são as seguintes:

- permitir um projeto sistemático do sistema de controle visando otimização de desempenho e/ou robustez;
- realizar simulações digitais do processo.

A simulação digital, que consiste da solução numérica da(s) equação(ões) que representa(m) o processo, permite determinar aproximadamente o comportamento do processo sob diversas condições de operação e sob a ação de diferentes perturbações e ações de controle sem a necessidade de efetivamente submeter o processo real a estas condições. A simulação é muito mais rápida, versátil, barata e segura do que a realização de ensaios sobre o processo. Como tal, a simulação constitui um importante passo intermediário no projeto de um sistema de controle que reduz substancialmente custos, tempo de teste e riscos.

Modelos matemáticos surgem a partir da análise dos princípios físicos que regem o processo. Esses modelos apresentam-se naturalmente sob a forma de equações diferenciais cuja incógnita é a variável de processo e cujas variáveis independentes são as variáveis manipuladas no processo e as perturbações. A partir destas equações diferenciais, convenientemente linearizadas (ver seção 4.3), e com o uso da transformada de Laplace, podem ser obtidas funções de transferência.

Esta análise fornece a função de transferência em forma literal, onde aparecem parâmetros. Alguns desses parâmetros têm valor numérico conhecido ou de fácil determinação a partir da própria análise. Outros parâmetros têm seus valores muito incertos e é bastante difícil, senão impossível, determiná-los *a priori* com a precisão

necessária. É então necessário efetuar um procedimento para determinar os valores numéricos desses parâmetros, procedimento que recebe o nome de identificação.

Pode-se então dividir o processo de obtenção de um modelo matemático em duas etapas básicas: análise e identificação. Os procedimentos envolvidos na etapa de análise são apresentados por meio de exemplos na seção 4.2. A etapa de identificação é discutida na seção 4.4.

4.2 Modelos de processos

4.2.1 Processos térmicos

Denominam-se processos térmicos aqueles em que a variável de processo é a temperatura. Processos térmicos são muito comuns na indústria, onde em muitas aplicações é necessário controlar a temperatura de fornos, tanques com misturas líquidas, prensas, peças metálicas, etc. Vamos estudar a seguir a modelagem de um forno aquecido por uma resistência, como representado na Figura 4.1; outros processos térmicos podem ser modelados de maneira similar. A variável de processo é a temperatura interna do forno e a variável manipulada é a potência elétrica fornecida à resistência.

Sejam T a temperatura e Q a energia das moléculas no interior do forno. A injeção de uma quantidade infinitesimal de energia dQ no forno causa uma variação infinitesimal de temperatura dT que é proporcional à energia injetada:

$$dQ = C dT \quad (4.1)$$

onde a constante de proporcionalidade C é denominada *capacidade térmica* do material a ser aquecido.

Derivando a expressão (4.1) com relação ao tempo tem-se:

$$\frac{dQ}{dt} = C \frac{dT}{dt} \quad (4.2)$$

A taxa de injeção de energia $\frac{dQ}{dt}$ é composta de duas parcelas: a potência fornecida ao forno pela resistência subtraída da perda de

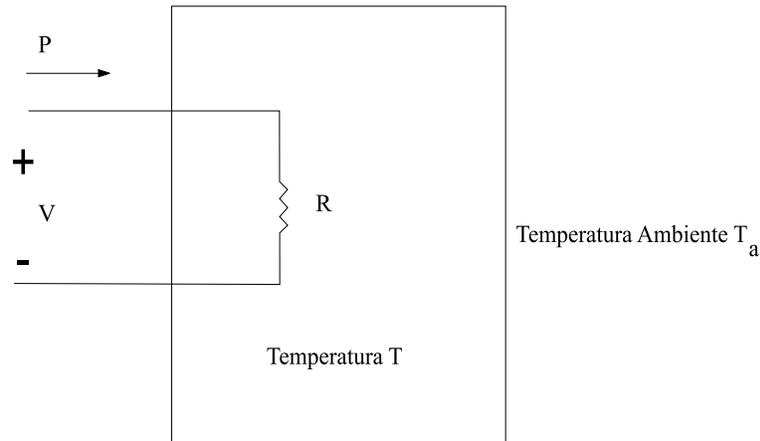


Figura 4.1 - Sistema de controle de temperatura de um forno

energia pelas paredes do forno. Então:

$$\frac{dQ}{dt} = P - k_T(T - T_a) \quad (4.3)$$

onde k_T é a constante de perdas (característica das paredes do forno), T_a é a temperatura do meio externo e P é a potência dissipada na resistência por efeito Joule. Nesse sistema P é a variável manipulada, T_a é um sinal de perturbação e T é a variável de processo.

Substituindo (4.3) em (4.2) obtém-se:

$$C \frac{dT}{dt} + k_T T = P + k_T T_a$$

Aplicando a transformada de Laplace obtém-se o modelo desejado:

$$T(s) = \frac{1}{C s + k_T} P(s) + \frac{k_T}{C s + k_T} T_a(s)$$

Este modelo traz implícita a hipótese de que a temperatura é uniforme dentro do forno, o que somente se verifica em regime permanente. O efeito da heterogeneidade da temperatura pode ser aproximado por um atraso de transporte que representa o tempo de propagação do

calor desde a resistência até o elemento de medição. A função de transferência da variável manipulada para a variável de processo fica:

$$\frac{T(s)}{P(s)} = \frac{e^{-\tau s}}{C s + k_T} \quad (4.4)$$

onde τ é o atraso de transporte. É importante ter em mente que T representa a temperatura no ponto de medida, ou seja, na posição onde está localizado o sensor de temperatura.

4.2.2 Motores de corrente contínua

Na Figura 4.2 é representado esquematicamente um motor elétrico de corrente contínua. Os motores elétricos são sistemas eletromecânicos, isto é, constituídos de circuitos (parte elétrica) que interagem magneticamente com corpos em movimento (parte mecânica). O movimento dos corpos é regido pelas leis da mecânica clássica, os circuitos elétricos obedecem às leis de Kirchoff e as leis do eletromagnetismo descrevem a interação entre a parte elétrica e a parte mecânica do motor. Logo, a obtenção de um modelo matemático para um motor elétrico envolverá a aplicação criteriosa das leis de Newton, de Kirchoff e de Faraday a cada uma de suas partes, como a seguir.

O movimento rotacional do rotor obedece à segunda lei de Newton:

$$J\dot{\omega} = T_e - T_m - B\omega \quad (4.5)$$

onde ω é a velocidade angular do rotor, T_e é o torque elétrico produzido pelo motor, T_m é o torque de carga, J é o momento de inércia e B é o coeficiente de atrito viscoso. O momento de inércia J e o coeficiente de atrito viscoso B correspondem ao conjunto do rotor e carga e, portanto, são parâmetros cujos valores podem variar com a carga. O torque de carga T_m em (4.5) é um sinal externo, portanto adequado para modelar cargas que não dependem da velocidade ou de outras variáveis do motor. Aplicando a transformada de Laplace na equação (4.5) obtém-se a equação de movimento do motor:

$$\omega(s) = \frac{1}{Js + B} [T_e(s) - T_m(s)] \quad (4.6)$$

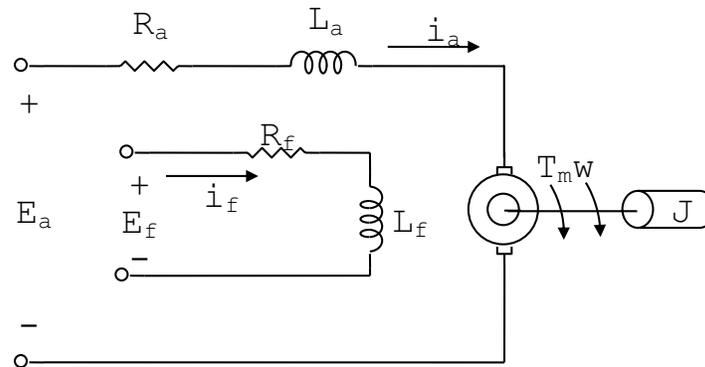


Figura 4.2 - Esquema de um motor de corrente contínua

Diferentes tipos de carga do motor encontrados em diferentes aplicações devem ser modelados de diferentes formas. Considere três exemplos de aplicação: um elevador, um braço de robô rotacionando um objeto e um ventilador.

No caso do elevador, seu peso resulta em um torque no eixo do motor que depende do número de passageiros, porém constante para cada viagem. Assim, o modelo descrito pela equação (4.5), com parâmetros constantes B e J e o sinal externo T_m , representa adequadamente o processo. Já no caso do braço de robô, o objeto rotacionado é solidário ao eixo do motor e assim sendo se comporta como se dele fizesse parte. Assim, o efeito da carga pode ser modelado agregando o momento de inércia do objeto ao do rotor, aumentando o valor dos parâmetros B e J na equação (4.5). Para objetos de diferentes massas e formatos, esses parâmetros assumirão valores distintos. Então o sinal externo T_m somente estará presente no modelo se houver alguma perturbação externa adicional. Na ausência de uma tal perturbação, o modelo dado por (4.5) com $T_m = 0$ é adequado, porém deve-se levar em conta as variações nos valores dos parâmetros B e J caso objetos distintos devam ser manipulados. Finalmente, no caso de um motor acionando um

ventilador, o torque resistente é proporcional ao quadrado da velocidade. A modelagem da carga nesse caso exige um termo adicional na equação (4.5) para representar este torque. Por outro lado, novamente o sinal externo T_m será diferente de zero somente se houver alguma perturbação externa adicional.

Em cada tipo de motor elétrico, o mecanismo de geração de torque elétrico T_e é diferente, mas em todos os casos a equação (4.6) aparece no modelo descrevendo a parte mecânica do motor (um tratamento completo da modelagem de máquinas elétricas é apresentado em Krause (1994)). Em motores de corrente contínua, o torque eletromagnético produzido é proporcional ao produto das correntes de campo e de armadura:

$$T_e = k_T i_f i_a \quad (4.7)$$

onde k_T é uma constante de proporcionalidade e i_f e i_a são as correntes de campo e de armadura, respectivamente. Os circuitos de campo e de armadura são circuitos RL, de forma que as correntes de campo e de armadura obedecem às equações diferenciais, obtidas pela lei de Kirchoff das malhas:

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + k_\omega i_f \omega - E_a = 0 \quad (4.8)$$

$$L_f \frac{di_f}{dt} + R_f i_f - E_f = 0 \quad (4.9)$$

onde L_a , R_a , L_f e R_f são respectivamente as indutâncias e resistências dos circuitos de armadura e de campo, ω é a velocidade do eixo do motor, E_a e E_f são as tensões aplicadas à armadura e ao campo, e k_ω é uma constante. O termo $k_\omega i_f \omega$ representa a tensão de reação da armadura. Um modelo completo para o motor de corrente contínua é dado pelas equações (4.6) a (4.9). Nesse modelo, T_m é a entrada de perturbação e há duas variáveis passíveis de serem manipuladas (entradas de controle): E_a e E_f .

4.2.3 Controle por tensão de armadura

Motores de corrente contínua são normalmente operados mantendo uma das tensões constante e variando a outra, que fica sendo então a

variável manipulada do processo. No que segue consideramos o controle por tensão de armadura, ou seja, operação com tensão de campo constante. O modelo para controle por tensão de campo, com tensão de armadura constante, pode ser obtido de maneira similar.

Fazendo $E_f = E_{f0}$ (constante) tem-se, de acordo com (4.9):

$$i_f(t) = \frac{E_{f0}}{R_f} (1 - e^{-\frac{R_f}{L_f}t})$$

de forma que i_f converge exponencialmente para um valor de regime permanente $i_{f0} = \frac{E_{f0}}{R_f}$. Substituindo esse valor constante e aplicando a transformada de Laplace na equação (4.8) obtém-se:

$$i_a(s) = \frac{1}{L_a s + R_a} E_a(s) - \frac{k_\omega i_{f0}}{L_a s + R_a} \omega(s)$$

Com corrente de campo constante, o torque torna-se proporcional à corrente i_a , de forma que:

$$T_e(s) = k_T i_{f0} i_a(s) = \frac{k_T i_{f0}}{L_a s + R_a} E_a(s) - \frac{k_T k_\omega i_{f0}^2}{L_a s + R_a} \omega(s)$$

Por outro lado, da equação (4.6) tem-se que

$$\omega(s) = \frac{1}{J s + B} T_e(s) - \frac{1}{J s + B} T_m(s)$$

e, portanto,

$$\omega(s) = \frac{1}{J s + B} \left(\frac{k_T i_{f0}}{L_a s + R_a} E_a(s) - \frac{k_T k_\omega i_{f0}^2}{L_a s + R_a} \omega(s) \right) - \frac{1}{J s + B} T_m(s)$$

Isolando $\omega(s)$ obtém-se finalmente:

$$\omega(s) = \frac{k_E}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} E_a(s) - \frac{L_a s + R_a}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} T_m(s) \quad (4.10)$$

onde

$$\begin{aligned} k_E &\triangleq k_T i_{f0} \\ a_2 &\triangleq J L_a \\ a_1 &\triangleq J R_a + B L_a \\ a_0 &\triangleq B R_a + k_T k_\omega i_{f0}^2 \end{aligned}$$

Se, por outro lado, tem-se em vista um controle de posição, então é necessário obter o modelo em função desta variável. Para tanto, basta observar que a posição do rotor (anotada δ) é igual à integral da velocidade:

$$\frac{\delta(s)}{\omega(s)} = \frac{1}{s}$$

de forma que:

$$\delta(s) = \frac{k_E}{s(a_2 s^2 + a_1 s + a_0)} E_a(s) - \frac{L_a s + R_a}{s(a_2 s^2 + a_1 s + a_0)} T_m(s)$$

4.2.4 Controle por corrente de armadura

No controle de motores elétricos, a variável manipulada é usualmente uma tensão. No entanto, é comum fazer um laço de controle de corrente no motor, de forma que a corrente possa ser especificada. Então a corrente passa a ser a variável manipulada para o controle de velocidade e/ou posição do rotor. O laço de controle de corrente pode ser implementado por meio de controle proporcional, ou seja,

$$E_a = k(i_{ref} - i_a)$$

Fazendo k muito grande, o erro de regime permanente deste laço de controle será desprezível e a corrente de armadura tenderá rapidamente ao valor i_{ref} . Assume-se então que $i_a \approx i_{ref}$ para quase todo instante de tempo. A corrente de referência pode então ser manipulada, e efetivamente ela passa a ser a variável de controle do processo e a velocidade é dada por:

$$\omega(s) = \frac{k_T i_{f0}}{J s + B} i_a(s) - \frac{1}{J s + B} T_m(s) \quad (4.11)$$

Um diagrama de blocos para o motor controlado por corrente é apresentado na Figura 4.3.

4.2.5 Processos de nível

Considere um tanque como mostrado na Figura 4.4, em que q_i é a vazão de entrada, q_o é a vazão de saída e h é o nível do tanque. Então,

$$\dot{h} = \frac{1}{A\rho}(q_i - q_o) \quad (4.12)$$

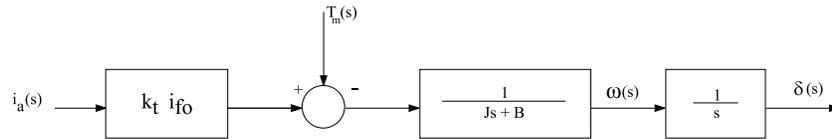


Figura 4.3 - Diagrama de blocos do motor de corrente contínua controlado por corrente de armadura

onde A é a área da seção do tanque e ρ é a densidade do líquido.

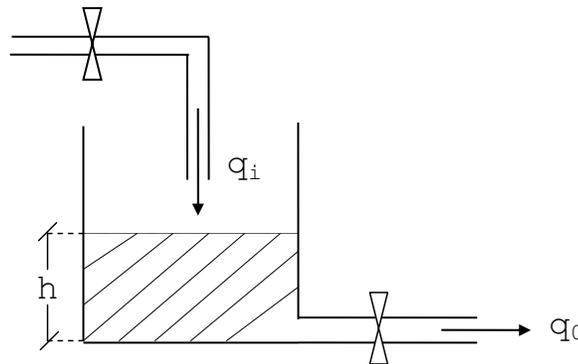


Figura 4.4 - Sistema de controle de nível de um tanque

A vazão de entrada q_i representa a entrada de controle (variável manipulada) do processo, enquanto a vazão de saída q_o depende do nível do tanque de acordo com:

$$q_o = \frac{1}{R}(p_t - p_o)^\alpha \quad (4.13)$$

onde p_t é a pressão hidrostática no fundo do tanque e p_o é a pressão hidrostática ao final da tubulação, R é a resistência da tubulação (assumida constante, mas que pode ser alterada pela abertura da válvula de saída do tanque se desejado) e α é um coeficiente cujo valor depende do tipo de fluxo, que é definido pelo seu número de Reynolds (Luyben;

Capítulo 4 Modelagem de processos

Luyben (1997)). Para números de Reynolds inferiores a 2.000, o fluxo é dito laminar e o coeficiente α é igual à unidade, resultando em uma equação linear. Para fluxo não laminar, o coeficiente varia entre 1 e $\frac{1}{2}$ e a equação resultante não é linear. Vamos inicialmente estudar o caso de fluxo laminar; o caso de fluxo turbulento, que corresponde a um número de Reynolds maior do que 10^5 e $\alpha = \frac{1}{2}$, será estudado na seção 4.3.1.

A pressão hidrostática no fundo do tanque é dada por:

$$p_t = \rho gh + p_{atm} \quad (4.14)$$

onde g é a aceleração da gravidade e p_{atm} é a pressão atmosférica. Substituindo (4.14) e fazendo $\alpha = 1$ em (4.13) obtém-se:

$$q_o = \frac{1}{R}\rho gh - \frac{1}{R}p_o + \frac{1}{R}p_{atm} = \frac{1}{R}\rho gh \quad (4.15)$$

pois a pressão na saída da tubulação é igual à pressão atmosférica.

Finalmente, substituindo (4.15) em (4.12) e aplicando a transformada de Laplace obtém-se:

$$h(s) = \frac{R}{(A\rho R)s + \rho g} q_i(s)$$

4.3 Linearização de modelos não-lineares

Nos exemplos anteriores as equações diferenciais resultantes da análise do processo eram lineares e invariantes no tempo. Equações lineares e invariantes no tempo apresentam propriedades muito importantes que permitem a aplicação de métodos poderosos de análise como a transformada de Laplace. Em geral, as equações obtidas da análise são invariantes no tempo, porém não são lineares e, portanto, não é possível aplicar estas ferramentas.

Aplica-se então uma aproximação linear para estas equações não-lineares. Todas as funções não-lineares envolvendo as variáveis da equação diferencial são representadas pela sua expansão em série de Taylor em torno de um valor constante. A série de Taylor é então truncada, sendo retidos somente seus dois primeiros termos. Os detalhes

deste procedimento serão apresentados mais adiante por meio de um exemplo; seu embasamento teórico é o que segue.

Considere uma função $f(x)$ a ser expandida em torno de um valor $x = x_0$ e defina a variável auxiliar $\Delta x \triangleq x - x_0$. Então a função $f(x)$ pode ser escrita como:

$$f(x) = f(x_0) + \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} \Delta x + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right|_{x=x_0} \Delta x^2 + \dots \quad (4.16)$$

Definindo ainda $\Delta f(x) \triangleq f(x) - f(x_0)$ e assumindo que Δx é pequeno, pode-se aproximar a igualdade (4.16) por:

$$\Delta f(x) \approx \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} \Delta x \quad (4.17)$$

que é uma relação linear. Note, porém, que essa relação linear não relaciona as variáveis do sistema entre si, mas sim pequenas variações destas variáveis em torno de um valor constante.

Este modelo é uma aproximação do modelo original (não-linear) obtida desprezando os termos de mais alta ordem presentes na igualdade (4.16). Esses termos são potências de Δx e, portanto, são tão menores quanto menor for a diferença $x - x_0$. Assim sendo, a aproximação é tão melhor quanto mais próximo x estiver de x_0 e deixa de ser válida quando x se afasta consideravelmente deste valor. Portanto, o uso de um modelo obtido dessa forma traz implícita a hipótese de que as variáveis do sistema se comportam dessa forma, ou seja, com pequenas variações, mantendo-se sempre próximas a um determinado valor constante.

Em um sistema de controle bem projetado, as variáveis efetivamente comportam-se dessa maneira. Com efeito, o objetivo de um sistema de controle é, em geral, justamente fazer com que a variável de processo se mantenha constante. Assim, num sistema em condições normais de operação, com um controlador bem projetado, as variáveis do processo sofrem pequenas variações em torno de seu valor de regime permanente, que é definido pelo ponto de operação desejado. Logo, um modelo que descreve adequadamente a relação entre essas pequenas variações das diversas variáveis do sistema é adequado para o projeto de um sistema de controle.

4.3.1 Processos de nível

Considere novamente o processo da seção 4.2.5, porém agora em condição de fluxo turbulento, isto é, com número de Reynolds superior a 10^5 ; então $\alpha = \frac{1}{2}$. Substituindo (4.13) em (4.12) tem-se:

$$\dot{h} = \frac{1}{A\rho} \left(q_i - \frac{1}{R} \sqrt{\rho g h - p_o} \right) \quad (4.18)$$

onde aparece a função não-linear $f(h) \triangleq \sqrt{\rho g h - p_o}$.

Seja agora h_0 o nível desejado para o processo em regime permanente. O nível h_0 é atingido para uma dada vazão de entrada q_{i0} , de acordo com a equação (4.18). Em regime permanente, as derivadas das variáveis se anulam, de forma que (4.18) se torna:

$$\frac{1}{A\rho} \left(q_{i0} - \frac{1}{R} \sqrt{\rho g h_0 - p_o} \right) = 0 \quad (4.19)$$

o que permite determinar q_{i0} em função de h_0 .

Expandindo a função não-linear em série de Taylor em torno de h_0 como em (4.16) obtém-se:

$$f(h) = \sqrt{\rho g h - p_o} \approx \sqrt{\rho g h_0 - p_o} + \frac{1}{2\sqrt{\rho g h_0 - p_o}} (h - h_0)$$

Esta aproximação é representada graficamente na Figura 4.5.

Definindo-se agora as variações das variáveis em torno de seus valores em regime permanente como:

$$\begin{aligned} \Delta h &\triangleq h - h_0 \\ \Delta q_i &\triangleq q_i - q_{i0} \end{aligned}$$

a equação linearizada será escrita em função dessas novas variáveis. Note que, uma vez que h_0 é constante,

$$\frac{d\Delta h}{dt} = \frac{dh}{dt}$$

Substituindo todas estas definições em (4.18) obtém-se:

$$\frac{d\Delta h}{dt} = \frac{1}{A\rho} \left[(\Delta q_i + q_{i0}) - \frac{1}{R} \left(\sqrt{\rho g h_0 - p_o} + \frac{1}{2\sqrt{\rho g h_0 - p_o}} \Delta h \right) \right]$$

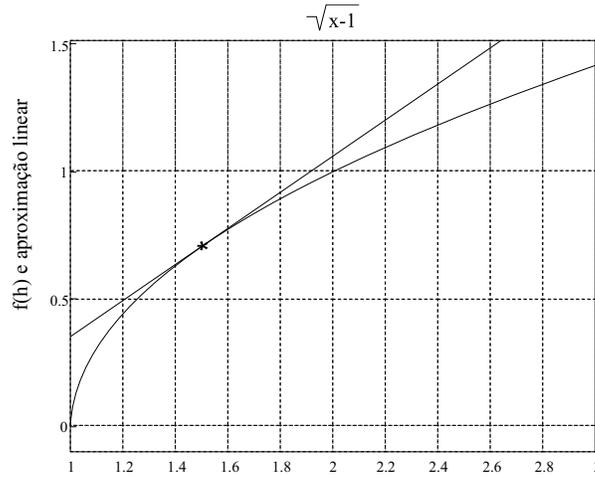


Figura 4.5 - Linearização de modelos

$$= \frac{1}{A\rho} \left[\Delta q_i - \frac{1}{R} \frac{1}{2\sqrt{\rho g h_0 - p_o}} \Delta h \right] + \frac{1}{A\rho} \left[q_{i0} - \frac{1}{R} \sqrt{\rho g h_0 - p_o} \right] \quad (4.20)$$

O último termo desta equação é zero, de acordo com a relação de regime permanente (4.19), de forma que se obtém:

$$\frac{d\Delta h}{dt} = -\frac{1}{2A\rho R\sqrt{\rho g h_0 - p_o}} \Delta h + \frac{1}{A\rho} \Delta q_i \quad (4.21)$$

que é uma relação linear, pois os coeficientes de Δh e Δq_i são constantes. Finalmente, aplicando a transformada de Laplace a (4.21) obtém-se a função de transferência entre as variações de pequeno sinal da variável de processo e da variável manipulada:

$$\frac{\Delta h(s)}{\Delta q_i(s)} = \frac{2R\sqrt{\rho g h_0 - p_o}}{2A\rho R\sqrt{\rho g h_0 - p_o} s + 1} \quad (4.22)$$

Note que o valor da constante de tempo $2A\rho R\sqrt{\rho g h_0 - p_o}$ e do ganho estático do processo $2R\sqrt{\rho g h_0 - p_o}$ dependem do ponto de operação.

4.4 Identificação de parâmetros

A análise teórica de um sistema fornece a estrutura de sua função de transferência, expressa pelo número de pólos e de zeros e a existência ou não de atraso (ver Apêndice A). Os valores numéricos dos coeficientes da função de transferência por vezes têm claro significado físico e estão disponíveis a partir da própria análise teórica. Porém, muitas vezes isso não ocorre, pois os parâmetros físicos podem ter valores muito incertos, difíceis de determinar e variar significativamente com o desgaste do equipamento. Tome-se como exemplo, dentre os exemplos já apresentados, o coeficiente de atrito viscoso do motor de corrente contínua e a constante de perdas das paredes do forno. Ademais, os coeficientes das funções de transferência são muitas vezes obtidos como o produto ou quociente desses parâmetros físicos, de forma que os erros numéricos nos parâmetros físicos são propagados e amplificados, acarretando erros ainda maiores nos coeficientes da função de transferência.

Nesses casos os valores numéricos mais corretos para os coeficientes da função de transferência devem ser determinados a partir de resultados experimentais obtidos do processo. Mesmo quando os valores desses coeficientes são conhecidos, muitas vezes é importante realizar ensaios para verificar a exatidão do modelo e fazer ajustes finos nesses valores. Ao procedimento de utilizar dados provenientes de ensaios sobre o processo com a finalidade de determinar os valores numéricos dos coeficientes de um modelo matemático dá-se o nome de identificação de parâmetros. Vamos relacionar os princípios básicos que servem como guia para o procedimento de identificação e permitem aplicá-lo para grande parte dos processos industriais. Para um tratamento formal do problema de identificação ver Aguirre (2004).

O exemplo a seguir ilustra a lógica inerente à identificação de processos.

Exemplo 4.1 Considere um motor de corrente contínua com a velocidade controlada pela tensão de armadura, como na seção 4.2.2. Da equação (4.10), a função de transferência entre a variável manipulada

(E_a) e a variável de processo (ω) é dada por:

$$\frac{\omega(s)}{E_a(s)} = \frac{k_E}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{K}{s^2 + 2\sigma s + \omega_n^2} \quad (4.23)$$

Os coeficientes k_E , a_0 , a_1 e a_2 (ou equivalentemente K , σ e ω_n) poderiam, em princípio, ser calculados a partir dos parâmetros físicos do motor (momento de inércia, resistência e indutância do circuito de armadura, etc). Alguns desses parâmetros físicos têm valores conhecidos ou facilmente mensuráveis, porém outros são incertos (como a indutância mútua) ou podem variar substancialmente com o desgaste do motor e outras condições de operação (como o coeficiente de atrito). Assim, no lugar de utilizar os valores de cada um destes parâmetros físicos para o cálculo dos coeficientes da função de transferência, é mais indicado efetuar um ensaio no motor e deduzir os valores dos parâmetros da função de transferência a partir do resultado deste ensaio.

A fim de determinar os valores dos coeficientes “a” da função de transferência, um salto de tensão de amplitude 100 V é aplicado à entrada de tensão do motor (em malha aberta) e sua velocidade é medida. Suponha que este ensaio é realizado e que resulta na medida apresentada na Figura 4.6. Os parâmetros serão identificados comparando o resultado do ensaio com a resposta padrão de um sistema de segunda ordem, como apresentada no Apêndice A.

Como a resposta é oscilatória, deduz-se que os pólos da função de transferência são complexos. A resposta transitória de uma função de transferência como em (4.23) com um par de pólos complexos é uma senóide amortecida com frequência igual a $\omega_d = \sqrt{\omega_n^2 - \sigma^2}$ e cuja envoltória é uma exponencial $e^{-\sigma t}$ onde ω_d e σ são os parâmetros da função de transferência (4.23). Da Figura 4.6 vê-se que o tempo de acomodação é da ordem de 1 s, de forma que $\sigma \approx 4/1 = 4 \text{ s}^{-1}$. Já a oscilação tem um período de aproximadamente 0,44 s, de forma que $\omega_d = \sqrt{\omega_n^2 - \sigma^2} \approx 2\pi/0,44 = 14,3 \text{ rad/s}$.

O ganho de regime permanente, por sua vez, é dado por $G(0) = \frac{K}{\omega_n^2}$ e medido no ensaio como igual a $634/100 = 6,34 \frac{\text{rpm}}{\text{V}}$, de forma que $K = 6,34 \times (\omega_d^2 + \sigma^2) = 1.398 \frac{\text{rpm}}{\text{V s}^2}$. A função de transferência é,

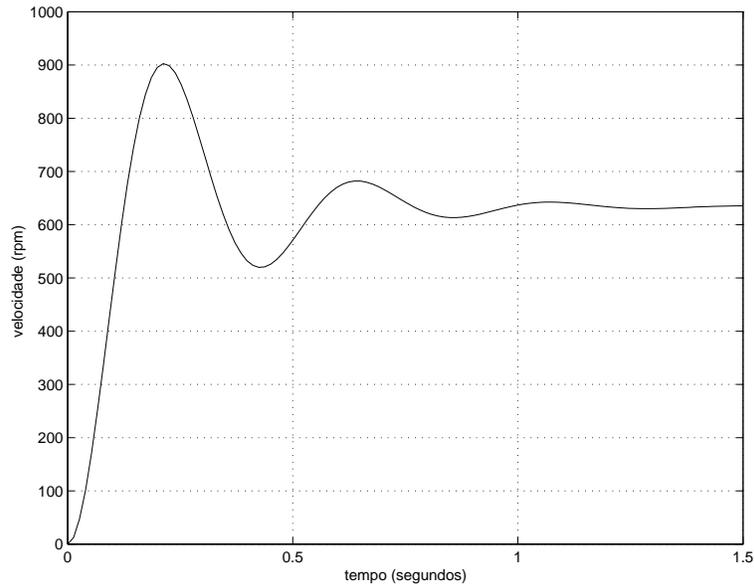


Figura 4.6 - Velocidade do motor CC em resposta a um salto de tensão de 100 V - dados de simulação

portanto,

$$\frac{\omega(s)}{E_a(s)} = \frac{1.398 \text{ rpm}}{s^2 + 8 s + 220 \text{ V}}$$

No exemplo, a estrutura da função de transferência era conhecida da análise teórica do processo em questão. A partir dos dados fornecidos, comparando com a resposta analítica do modelo, é possível determinar quais devem ser os valores dos parâmetros para que haja concordância entre o valor medido e o valor resultante da simulação do modelo. A fim de verificar a validade do modelo identificado, simulações devem ser realizadas com o modelo identificado e comparadas com os resultados obtidos do sistema. Um bom modelo deve fornecer resultados similares ao sistema real para a mesma entrada. A resposta ao salto do modelo obtido no exemplo é apresentada na Figura 4.7 juntamente com a saída do sistema para comparação.

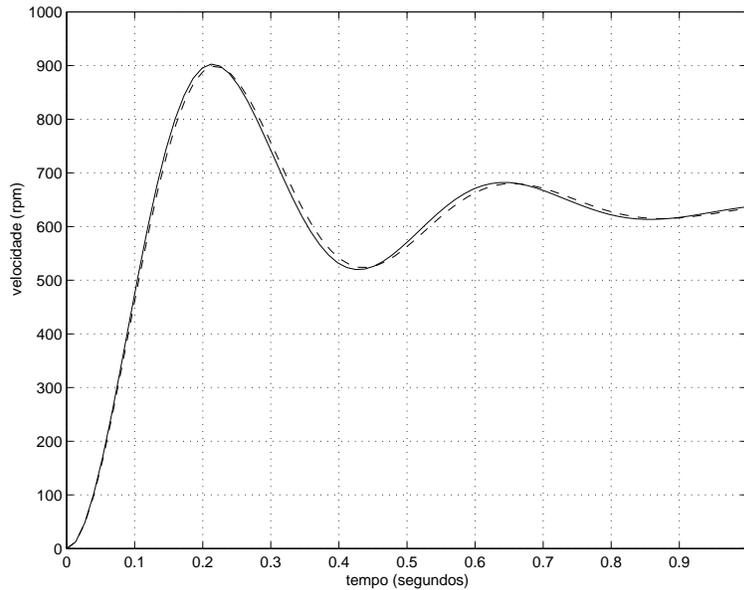


Figura 4.7 - Comparação dos dados originais (linha contínua) com a resposta a um salto do modelo identificado (linha tracejada)

A concordância do comportamento do modelo com os dados originais é bastante acurada. Entretanto, não é correto validar o modelo observando somente a resposta à mesma excitação que o gerou. O modelo deve fornecer bons resultados também para entradas distintas daquela(s) utilizada(s) para o cálculo dos parâmetros. A validação de um modelo deve ser feita com excitação diferente daquela que gerou os dados utilizados para o cálculo dos parâmetros.

A fim de validar o modelo do último exemplo, aplicamos um sinal distinto ao modelo e ao sistema e comparamos as respostas de cada um. O resultado é apresentado na Figura 4.8, onde pode ser observada boa concordância entre os comportamentos do modelo e do sistema (as duas curvas são indistinguíveis a olho nu).

Em identificação de processos, os sinais medidos são usualmente contaminados por ruído e o modelo a ser identificado é uma representação aproximada do comportamento do processo, que apresenta

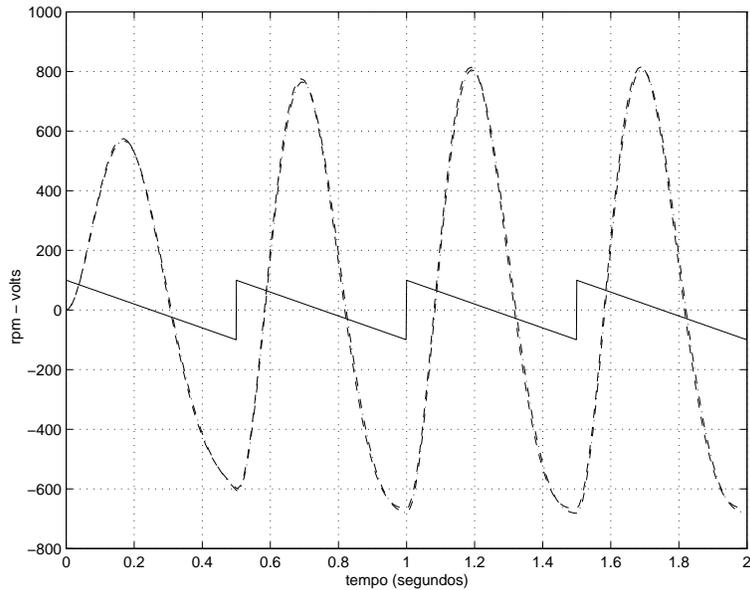


Figura 4.8 - Comparação dos dados originais (linha tracejada) com a resposta do modelo identificado (linha traço-ponto) em resposta a uma entrada dente de serra (linha contínua)

dinâmica mais complexa do que a representada pelo modelo. Esses fatores levam a dificuldades adicionais na identificação de parâmetros. A concordância entre a resposta do modelo e os dados nunca será exata devido ao ruído e à dinâmica não modelada. O próximo exemplo utiliza dados experimentais de um processo para ilustrar estas dificuldades e suas soluções.

Exemplo 4.2 Foi determinado nas seções 4.2.5 e 4.3.1 que um processo de nível controlado pela abertura de uma válvula pode ser modelado por uma função de transferência de ordem um:

$$G(s) = \frac{h(s)}{a(s)} = \frac{K}{1 + Ts} \quad (4.24)$$

onde h é o nível do tanque controlado e a é a abertura especificada para a válvula.

O processo de número 2 do Apêndice B consiste de um tanque cônico cujo nível de água (PV) é controlado pela abertura da válvula de admissão do tanque (MV). A fim de identificar os parâmetros da função de transferência desse processo, um salto foi aplicado em sua entrada da forma descrita a seguir. A válvula de admissão estava inicialmente fechada e, portanto, o tanque vazio. A válvula foi então abruptamente aberta até 55% de sua abertura máxima, sendo medido o nível. O resultado é apresentado na Figura 4.9. Note que a válvula foi aberta no instante $t = 90$ s.

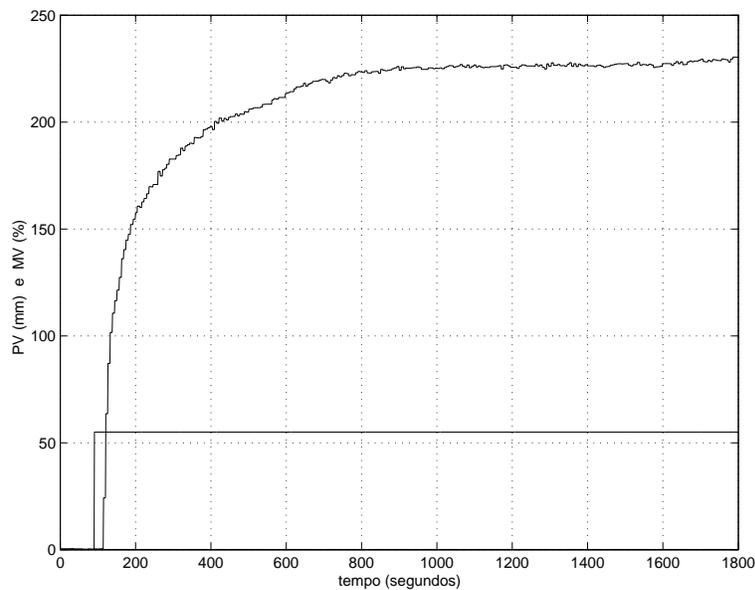


Figura 4.9 - Nível do tanque cônico em resposta à abertura da válvula de admissão de água

A resposta do processo não se enquadra exatamente na resposta de um sistema de ordem um como na equação (4.24). Dois efeitos distintos podem ser identificados: variações rápidas (ruído) e um atraso na resposta. O ruído tipicamente se deve a erros de medição, que são

aleatórios, e no presente caso deve-se também a variações rápidas do nível em função da turbulência (dinâmica não modelada). O atraso, por sua vez, deve-se à imperfeição do atuador, que não foi considerada na obtenção do modelo. Essa imperfeição manifesta-se sob dois aspectos: o atraso de comunicação da rede através da qual o atuador é comandado e a atuação do laço de controle do posicionador da válvula.

As variações rápidas do sinal devido ao ruído têm efeito pouco significativo no presente caso e por isto não causam maiores dificuldades. Porém, o atraso tem efeito significativo e, portanto, deve ser considerado a fim de modelar corretamente o processo. Para isso basta acrescentar um atraso à função de transferência (4.24), obtendo:

$$G(s) = \frac{h(s)}{a(s)} = e^{-\tau s} \frac{K}{1 + Ts}$$

O atraso pode ser estimado a partir da Figura 4.9 como $\tau \approx 20 \text{ s} = \frac{1}{3} \text{ min}$. O tempo de acomodação do processo pode também ser medido na figura, obtendo-se $t_s \approx 800 \text{ s}$. Logo a constante de tempo do modelo é dada por $T = \frac{t_s - \tau}{4} = 195 \text{ s} = 3,25 \text{ min}$. Finalmente, o valor de regime permanente da saída é medido como $h_{RP} = 230 \text{ mm}$, o que permite determinar o ganho $K = \frac{h_{RP}}{55\%} = 4,18 \frac{\text{mm}}{\%}$. Uma estimativa da função de transferência desse processo, com as unidades de tempo em minutos, é

$$G(s) = 4,18 \frac{\text{mm}}{\%} \frac{e^{-s/3}}{1 + 3,25 s}$$

Note que o sistema não é linear, uma vez que:

- o fluxo é turbulento (ver seção 4.3.1);
- a vazão de água pela válvula tem uma dependência não-linear com sua abertura;
- o tanque tem formato cônico, o que significa que a área da seção transversal (o parâmetro A do modelo) não é constante.

Assim sendo, o modelo obtido serve como uma aproximação para o comportamento do processo somente quando a abertura da válvula estiver dentro de uma faixa de valores entre os valores máximo (55%) e mínimo (0) aplicados. Ainda assim, é provável que esse modelo não

seja muito acurado, já que essa faixa é bastante ampla e, portanto, podem haver variações significativas do comportamento do processo.

Para ilustrar a característica não-linear do processo, mostramos o comportamento do processo para uma abertura diferente de válvula. Na Figura 4.10 é apresentado o comportamento do processo quando a abertura da válvula é aumentada em 3% a partir dos 55% anteriores, o que é feito no instante $t = 1950$ s. Note que agora os parâmetros serão bastante distintos: o atraso é aproximadamente o mesmo, enquanto a constante de tempo é significativamente maior; o ganho, por sua vez, é dado por $K = \frac{262-228}{3} = 11,3 \frac{\text{mm}}{\%}$. O modelo identificado para variações pequenas em torno de uma abertura de válvula de 55% é, portanto, dado por:

$$G(s) = 11,3 \frac{\text{mm}}{\%} \frac{e^{-s/3}}{1 + 5s}$$

Nos exemplos, os valores dos coeficientes da função de transferência foram determinados a partir de um ensaio com um salto. Esse é, em geral, o ensaio mais simples a ser feito, porém não é o único. Os valores dos coeficientes também podem ser determinados utilizando outros sinais de entrada. Por exemplo, pode-se aplicar senóides à entrada e analisar a resposta em frequência do processo para determinar os parâmetros da função de transferência.

Se uma senóide de frequência ω_1 é aplicada ao processo, então em regime permanente é medida uma senóide em sua saída com a mesma frequência, com amplitude e defasagem A_1 e Φ_1 , respectivamente (ver Capítulo 6). Da resposta em frequência da função de transferência tem-se que:

$$G(j\omega_1) = A_1 \angle \Phi_1 = \alpha_1 + j\beta_1 \quad (4.25)$$

O lado direito desta equação contém os valores medidos e o lado esquerdo consiste de uma função dos coeficientes a serem determinados. Aplicando senóides de diferentes frequências obtém-se uma equação como (4.25) para cada medida, formando um sistema de equações. Uma vez que se obtenha um número de equações igual ao número de coeficientes a serem determinados, esse sistema de equações pode ser resolvido, fornecendo como solução os valores desejados.

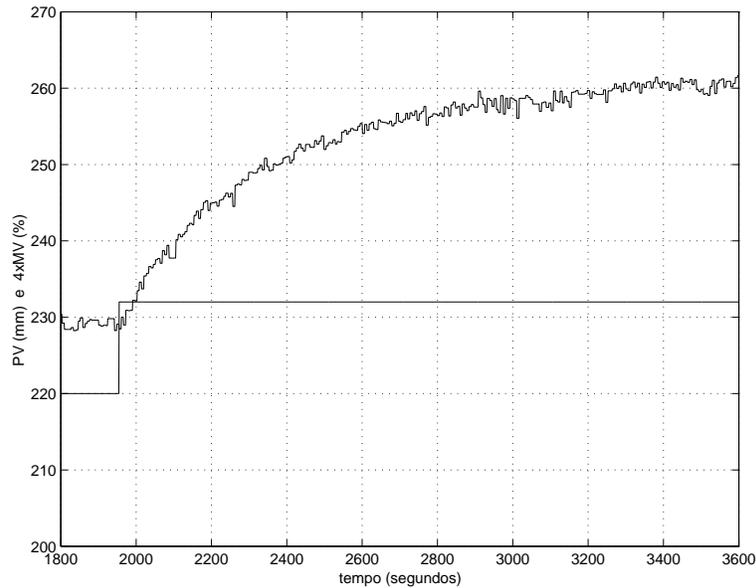


Figura 4.10 - Nível do tanque cônico em resposta à variação de abertura da válvula de admissão de água (o valor da abertura da válvula foi multiplicado por 4 para se ajustar à escala)

Exemplo 4.3 Duas senóides de mesma amplitude (100 V) e frequências de 1 Hz e 5 Hz ($\omega_1 = 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ e $\omega_2 = 10\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$) são aplicadas a um motor de corrente contínua obtendo-se as medidas das Figuras 4.11 e 4.12.

Em cada figura pode-se medir a amplitude e a defasagem da velocidade com relação à tensão. Os resultados são arrolados na Tabela 4.1.

Dessa forma tem-se que:

$$G(j\omega_1) = G(j2\pi) = \frac{740 \text{ rpm}}{100 \text{ V}} \angle -14,4^\circ = 7,17 - j1,84 \frac{\text{rpm}}{\text{V}}$$

$$G(j\omega_2) = G(j10\pi) = \frac{183 \text{ rpm}}{100 \text{ V}} \angle -162^\circ = -1,74 - j0,56 \frac{\text{rpm}}{\text{V}}$$

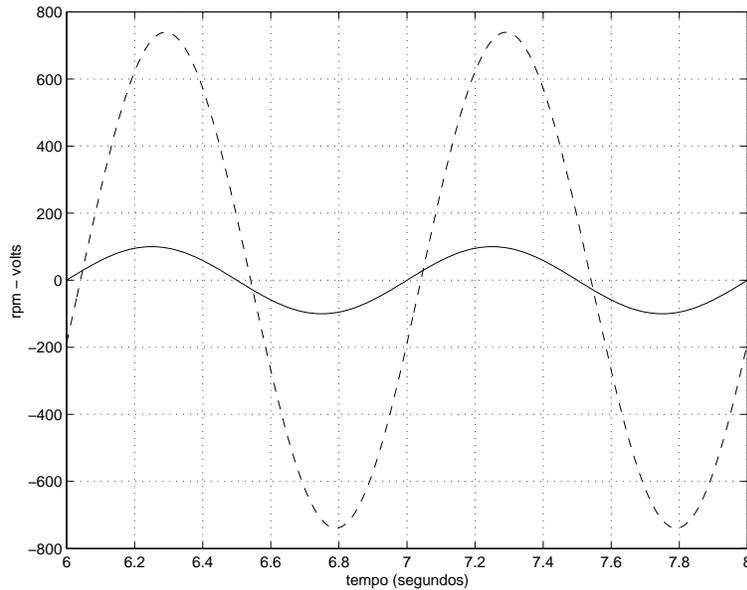


Figura 4.11 - Velocidade do motor de corrente contínua (linha tracejada) em resposta a uma tensão senoidal de amplitude igual a 100 V e frequência igual a 1 Hz

Por outro lado, a resposta em frequência da função de transferência é dada por:

$$G(j\omega) = \frac{K}{(\omega_n^2 - \omega^2) + j(2\sigma\omega)}$$

Equacionando a função de transferência com as medidas obtidas tem-se:

$$\frac{K}{(\omega_n^2 - \omega_1^2) + j(2\sigma\omega_1)} = \alpha_1 + j\beta_1 = 7,17 - j1,84 \quad (4.26)$$

$$\frac{K}{(\omega_n^2 - \omega_2^2) + j(2\sigma\omega_2)} = \alpha_2 + j\beta_2 = -1,74 - j0,56 \quad (4.27)$$

Igualando as partes reais e imaginárias de cada lado de cada

Capítulo 4 Modelagem de processos

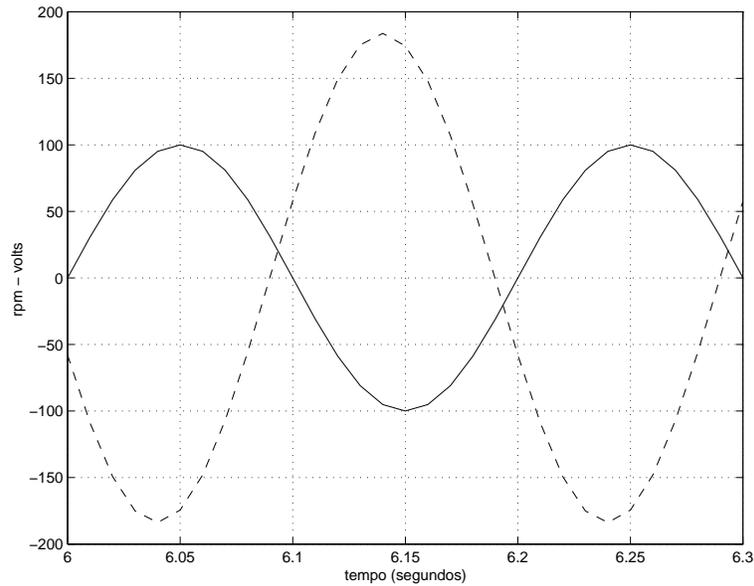


Figura 4.12 - Velocidade do motor de corrente contínua (linha tracejada) em resposta a uma tensão senoidal de amplitude igual a 100 V e frequência igual a 5 Hz

equação obtém-se um sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} -1 & -2\omega_1\beta_1 & \alpha_1 \\ 0 & 2\omega_1\alpha_1 & \beta_1 \\ -1 & -2\omega_2\beta_2 & \alpha_2 \\ 0 & 2\omega_2\alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K \\ \sigma \\ \omega_n^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1^2\alpha_1 \\ \omega_1^2\beta_1 \\ \omega_2^2\alpha_2 \\ \omega_2^2\beta_2 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

Apenas três equações são necessárias para a determinação dos três parâmetros K , σ e ω_n^2 , logo uma das equações presentes nesse sistema pode ser descartada. Desconsiderando, na equação (4.28), a quarta linha da igualdade matricial (quarta equação linear, correspondente à parte imaginária da equação (4.27)), e substituindo ali os valores

Tabela 4.1 - Medidas da resposta em frequência do motor de corrente contínua

Frequência	Amplitude	Defasagem (ms)	Defasagem (graus)
ω_1 (1 Hz)	740 rpm	40	-14,4
ω_2 (5 Hz)	183 rpm	90	-162

medidos, chega-se ao sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} -1 & 7,36\pi & 7,17 \\ 0 & 28,67\pi & -1,84 \\ -1 & 11,20\pi & -1,74 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K \\ \sigma \\ \omega_n^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28,67\pi^2 \\ -7,36\pi^2 \\ -174\pi^2 \end{bmatrix}$$

Solucionando esse sistema de equações lineares obtém-se os parâmetros da função de transferência:

$$\begin{bmatrix} K \\ \sigma \\ \omega_n^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1454 \\ 3,88 \\ 229,8 \end{bmatrix}$$

Note que não seria possível determinar os parâmetros com os dados de apenas uma senóide. Para determinar os três parâmetros são necessárias pelo menos duas senóides, caso contrário o sistema de equações lineares resultante será indeterminado. Isso ilustra um conceito básico em identificação de parâmetros: quanto maior o número de parâmetros a serem identificados mais complexo deve ser o ensaio, isto é, maior deve ser o número de componentes do espectro de frequências do sinal de entrada utilizado para o ensaio. O espectro de frequência do sinal de entrada deve ter pelo menos uma componente significativa para cada parâmetro a ser identificado. O espectro de frequências de uma senóide, por exemplo, contém duas componentes, portanto permite - em condições ideais - a identificação de dois parâmetros. Em condições reais são necessárias mais componentes de frequência para compensar os erros causados pela presença de ruído, erros de medida e dinâmica não modelada. Quando um sinal é suficientemente “rico”,

isto é, contém um número suficientemente grande de componentes significativas em seu espectro, diz-se que este sinal garante *persistência de excitação* ao processo.

Por outro lado, a frequência da senóide também é importante para as condições de identificação. Se o espectro de frequências do sinal de entrada estiver significativamente acima da banda passante do sistema, então a resposta observada terá amplitudes muito pequenas, o que na prática implica baixa relação sinal-ruído e conseqüentemente maiores erros de medida. Então os coeficientes α e β em (4.28) serão números pequenos, o que fará com que o sistema linear tenda a um sistema sem solução.

Portanto, a escolha do sinal de entrada utilizado para identificação deve ser criteriosa. O sinal aplicado ao sistema deve garantir persistência de excitação, que é condição fundamental para a obtenção de uma identificação correta. Além disso, seu espectro de frequência deve concentrar-se, tanto quanto possível, em frequências contidas dentro da banda passante do processo a ser identificado.

Nem sempre o comportamento do processo a ser modelado é tal que permita fazer a identificação de maneira similar à dos exemplos anteriores, particularmente quando o comportamento do processo é complexo, resultando em um modelo de ordem elevada. Os princípios apresentados continuam válidos mesmo nesses casos, porém a identificação destes modelos mais complexos passa por métodos mais sofisticados de identificação. O método mais comumente empregado é o método dos mínimos quadrados, que se vale de procedimentos numéricos para determinar os valores dos parâmetros no modelo que minimizam a soma dos quadrados das diferenças entre a resposta do modelo $\hat{y}(t)$ e a resposta medida do sistema $y(t)$ em cada instante de tempo em que foi feita uma medida, ou seja, a função:

$$\sum_{i=1}^N (\hat{y}(t_i) - y(t_i))^2$$

onde t_i são os instantes de tempo em que foram feitas medidas e N é o número desses instantes de tempo. O método dos mínimos quadrados é eficiente e fornece resultados acurados na maioria dos casos, desde que obedecidos os princípios já mencionados na realização dos experimentos e obtenção dos dados.

4.5 Exercícios

- 1) Como você entende (qual o significado para você) a linearização de um sistema não-linear em torno de um ponto de equilíbrio? Que utilidade você vê para este procedimento?
- 2) O que justifica a larga utilização de funções de transferência em sistemas de controle, levando-se em conta o fato de que a maioria dos sistemas físicos não são lineares?
- 3) Considere um sistema mecânico descrito pela equação diferencial:

$$M\ddot{y}(t) + D\dot{y}(t) + k((y(t))^2 + 2y(t)) = ku(t)$$

onde M , D e k são constantes e $u(t)$ é o sinal de entrada.

- a) Determine os pontos de equilíbrio para esse sistema para $u(t) = 8 \forall t$.
 - b) Obtenha uma aproximação linear desse sistema em torno do ponto de equilíbrio definido por um valor positivo de y .
 - c) Com base no sistema linearizado, esboce a resposta aproximada do sistema não-linear quando a entrada $u(t)$ é instantaneamente aumentada em 0,5 a partir do ponto de equilíbrio. Considere $M = 1$, $D = 11$, $k = 5/3$.
- 4) Considere o sistema descrito pela equação (4.29).

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \lambda(1 - y(t)^2)\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t) \quad (4.29)$$

- a) Determine o(s) ponto(s) de equilíbrio quando $u(t) = 0,5 \forall t$.
- b) Obtenha um modelo linearizado em torno de cada ponto de equilíbrio.
- c) Considere a condição de equilíbrio resultante para $u(t) = 0,5 \forall t$. Determine aproximadamente a resposta do sistema não-linear quando a entrada $u(t)$ é incrementada de 0,1 instantaneamente.

Capítulo 4 Modelagem de processos

- d) Simule o sistema não-linear e compare o resultado com a solução obtida no item anterior.
- 5) Um sinal do tipo salto unitário foi aplicado, no instante $t = 0$, à entrada de um processo, obtendo-se a resposta mostrada na Figura 4.13.

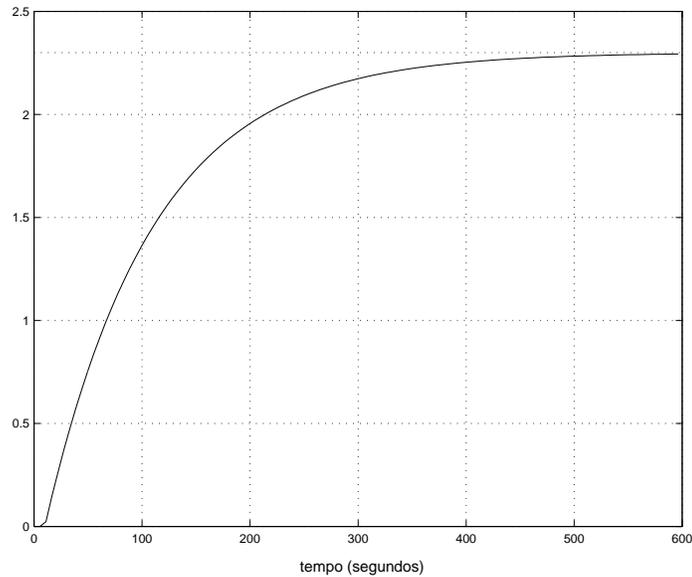


Figura 4.13 - Resposta ao salto unitário de um processo

Assumindo-se que o modelo do sistema nesta região de operação pode ser aproximado por uma função de transferência do tipo $G(s) = \frac{Ke^{-Ls}}{(Ts+1)}$, estime K , L e T .

- 6) Aplicou-se, em $t = 0$, um salto de amplitude 20 na entrada de um dado processo industrial, obtendo-se a curva de resposta apresentada na Figura 4.14.
 - a) Obtenha um modelo aproximado, na forma de uma função de transferência, para este sistema.

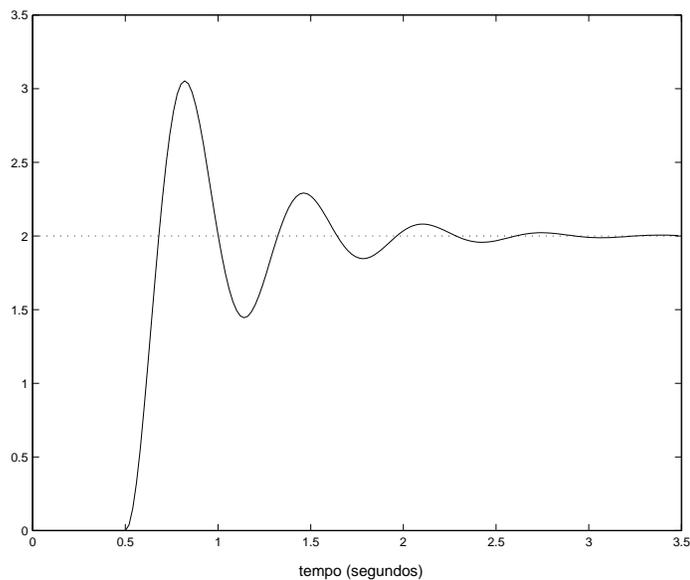


Figura 4.14 - Resposta de um processo a um salto de amplitude igual a 20

- b) O sistema é BIBO-estável?
- c) Esboce graficamente a resposta desse sistema para uma entrada do tipo rampa unitária.
- 7) Considere um pêndulo como apresentado na Figura 4.15.

A equação que descreve o comportamento dinâmico desse pêndulo é dada por:

$$T(t) = \frac{d^2\delta(t)}{dt} + 5\frac{d\delta(t)}{dt} - 14 \operatorname{sen}\delta(t)$$

onde δ é o ângulo com a vertical e T é o torque aplicado ao eixo (sinal de controle).

- a) Assumindo que $\operatorname{sen}\delta \approx \delta$ para δ pequeno, determine uma

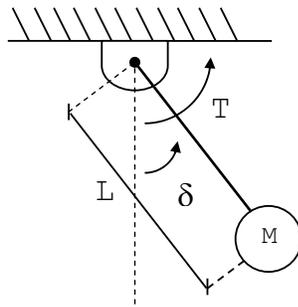


Figura 4.15 - Um pêndulo

função de transferência para o sistema, no entorno do ponto de equilíbrio.

- b) O sistema é assintoticamente estável? Justifique matematicamente e fisicamente.
- 8) Desprezando-se a dinâmica da parte elétrica (que, em geral, é muito mais rápida que a da parte mecânica), o comportamento de um dado servomotor pode ser modelado, por uma função de transferência do tipo:

$$G(s) = \frac{w(s)}{v(s)} = \frac{50}{10s + 1}$$

onde w é dado em rpm e v é dada em volts.

- a) Supondo que o motor está girando, em regime permanente, a uma velocidade constante de 100 rpm, qual o valor da tensão V que está sendo aplicada em sua entrada?
- b) Suponha que em um dado momento a tensão aplicada sobre o motor é aumentada em 2 V. Faça um gráfico explicitando o comportamento da velocidade a partir da aplicação deste salto.

- 9) Um ensaio em malha aberta é realizado com um forno. Primeiramente, é aplicada uma potência constante que faz com que sua temperatura chegue a 132°C. Em seguida, aumenta-se a potência aplicada em 5%. A evolução da temperatura, a partir da aplicação do salto de 5% (instante $t = 0$), é mostrada na Figura 4.16.

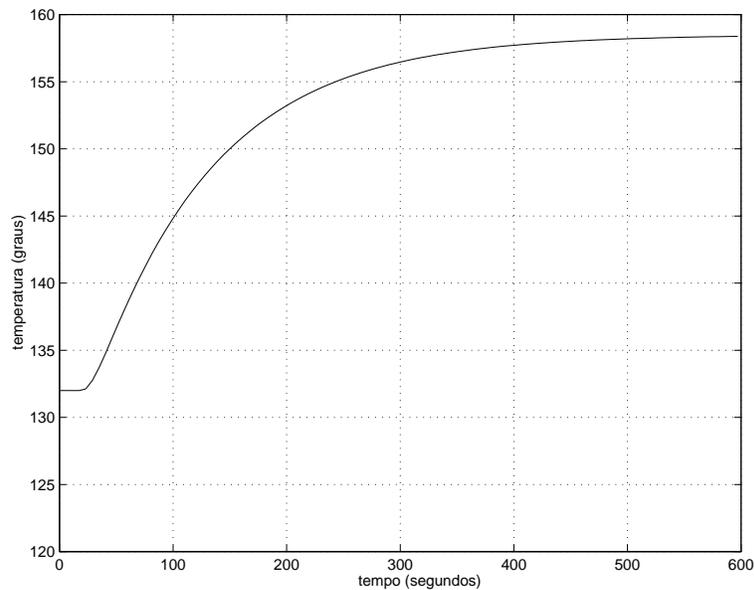


Figura 4.16 - Resposta de um forno a um salto

Com base neste gráfico, quais seriam os parâmetros K , L e τ , se desejássemos aproximar o comportamento do sistema para um ponto de operação próximo de 132°C, por uma função de transferência do tipo:

$$G(s) = \frac{\Delta T(s)}{\Delta P(s)} = \frac{K e^{-Ls}}{\tau s + 1}$$

- 10) A função de transferência de um processo de ordem dois é dada

Capítulo 4 Modelagem de processos

genericamente por:

$$G(s) = \frac{Kw_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2}$$

onde K é o ganho estático, w_n é a frequência natural de oscilação e ξ é o amortecimento. O valor do máximo sobrepasso percentual e do tempo de acomodação são dados, respectivamente, por:

$$Mo\% = 100e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$
$$t_s = \frac{4}{\xi w_n}$$

Suponha agora que injetamos um sinal do tipo salto de amplitude 1 na entrada de um processo, obtendo-se em sua saída a resposta apresentada na Figura 4.17.

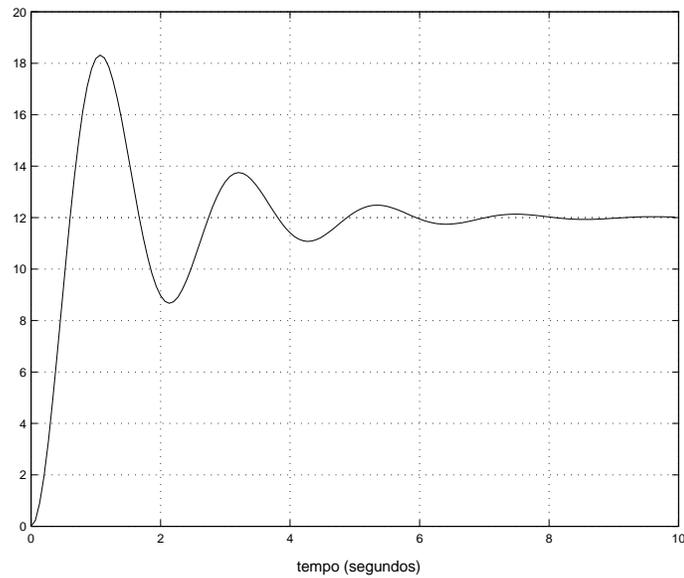


Figura 4.17 - Resposta de um processo a um salto unitário

Com base neste gráfico, quais seriam os parâmetros K , w_n , ξ se desejássemos aproximar o comportamento do sistema por uma função de transferência de ordem dois?

- 11) Obtenha um modelo matemático - equação diferencial e função de transferência - para um circuito RLC série alimentado por uma fonte de tensão, considerando como saída do sistema a tensão sobre o capacitor.
- 12) Repita o exercício anterior tomando a corrente do circuito como saída.
- 13) As seguintes funções de transferência foram propostas como possíveis modelos matemáticos para a relação entrada-saída do processo do exercício 9.

$$G_1(s) = \frac{3}{(s+1)(s-1)}$$

$$G_2(s) = \frac{3s-3}{s^2+2s+1}$$

$$G_3(s) = \frac{5e^{-0,5s}}{s^2+2s}$$

$$G_4(s) = \frac{10}{s+6}$$

$$G_5(s) = \frac{3}{(s+1)(s-1)}$$

$$G_6(s) = \frac{45}{s^2+2s+15}$$

$$G_7(s) = \frac{3e^{-0,5s}}{s^2+2s+1}$$

$$G_8(s) = \frac{15}{s+5}$$

- a) Quais delas podem ser consideradas erradas a partir do ensaio feito e por quê?
- b) Se esse processo for controlado por controle puramente proporcional, quanto deve ser o ganho proporcional para que o erro de regime permanente seja inferior a 5%?

Capítulo 4 Modelagem de processos

- 14) Considere um pêndulo como descrito no exercício 7.
- a) Obtenha um modelo linearizado para pequenas variações em torno de $\delta_o = 30^\circ$.
 - b) Determine analiticamente, a partir do modelo linearizado, a resposta do pêndulo a uma condição inicial $\delta(0) = 40^\circ$, $\dot{\delta}(0) = 0$.
 - c) Esboce graficamente a resposta a um salto de pequena amplitude no torque T_m a partir da condição de equilíbrio.
 - d) Repita o exercício para $\delta_o = 45^\circ$ e $\delta_o = 60^\circ$.
 - e) Estude a estabilidade do sistema em cada caso.
- 15) Um motor de indução (MI) com acionamento por campo orientado indireto (COI) pode ser modelado pelas seguintes equações diferenciais:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -c_1x_1 + c_2x_4 - \frac{\kappa c_1}{u_2^0}x_2x_4 \\ \dot{x}_2 &= -c_1x_2 + c_2u_2^0 + \frac{\kappa c_1}{u_2^0}x_1x_4 \\ \dot{x}_3 &= -c_3x_3 - c_4[c_5(x_2x_4 - u_2^0x_1) - T_m] \\ \dot{x}_4 &= k_c x_3 - k_p c_4 [c_5(x_2x_4 - u_2^0x_1) - T_m]\end{aligned}$$

onde x_1 a x_4 são as variáveis de estado do modelo, sendo que x_3 é a velocidade do eixo, que é a saída (variável controlada) deste processo, T_m é o torque de carga, u_2^0 é a corrente de eixo direto aplicada ao motor (constante), e as grandezas c_i , κ , k_c e k_p são parâmetros físicos do motor e do COI. Obtenha modelos linearizados para o MI com COI em torno de diversos pontos de operação.

Capítulo 5

Alocação de pólos

5.1 Introdução

As especificações de desempenho transitório de um sistema de controle se apresentam muitas vezes sob a forma de valores desejados para os critérios de desempenho: tempo de acomodação e máximo sobrepasso. Essas especificações usualmente decorrem das características operacionais do processo a ser controlado. Conforme visto no Capítulo 1, o desempenho transitório de um sistema de controle é determinado pelos pólos da função de transferência $T(s) = \frac{y(s)}{r(s)}$. Assim, as especificações de desempenho transitório se traduzem em restrições sobre as posições dos pólos da função de transferência de malha fechada $T(s)$. Então, se um sistema de controle é projetado para garantir que os pólos da função de transferência de malha fechada estejam em posições pré-especificadas, definidas em função das restrições de desempenho transitório, estará garantido o atendimento dessas restrições. Essa abordagem para o projeto é denominada *projeto por alocação de pólos*.

Uma vez escolhidas as posições desejadas para os pólos do sistema em laço fechado, resta determinar a função de transferência do controlador para que os pólos de laço fechado efetivamente assumam os valores escolhidos. Porém, nem sempre é possível alocar os pólos de malha fechada em posições arbitrariamente escolhidas com um dado controlador. Em geral, para um dado problema existe somente um conjunto de alocações possíveis que depende da estrutura do controlador.

As condições sob as quais é possível escolher livremente as posições dos pólos de laço fechado são dadas na seção 5.2, juntamente com o método de determinação dos parâmetros do controlador neste caso. Como, em geral, esta escolha arbitrária não é possível, é necessário escolher as alocações dos pólos somente dentre aquelas viáveis. Isso pode ser feito por meio do método do lugar das raízes, como apresentado na seções 5.3 e 5.4.

Escolha dos pólos do sistema em laço fechado - Quando caracterizada a dominância de um pólo ou par de pólos (ver Apêndice A), os critérios de desempenho transitório são determinados pela posição dos pólos dominantes de acordo com as relações aproximadas da Tabela 5.1. A satisfação das especificações de regime transitório é obtida escolhendo posições adequadas para os pólos de malha fechada de acordo com as expressões na Tabela 5.1 e ajustando o controlador de forma que os pólos de malha fechada efetivamente sejam alocados nestas posições. A este procedimento de ajuste dá-se o nome de *alocação de pólos*.

Tabela 5.1 - Desempenho transitório em função dos pólos dominantes

	Pólo real $-p_d$	Par de pólos complexos $-\sigma \pm j\omega_d$
t_s	$\frac{4}{p_d}$	$\frac{4}{\sigma}$
Mo %	0	$100e^{-\pi \frac{\sigma}{\omega_d}}$

As expressões da Tabela 5.1 são válidas quando um pólo ou par de pólos é dominante, o que ocorre quando um pólo ou par de pólos está muito mais próximo do eixo imaginário do que os pólos restantes e não há zeros próximos a ele. Para simplificar o projeto, procura-se escolher as posições dos pólos de malha fechada de forma a provocar a dominância. Quando isso não é possível ou conveniente, então estas expressões representam um ponto de partida para um processo iterativo na escolha da posição dos pólos.

5.2 A equação diofantina

Sejam $G(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$, $C(s) = \frac{E(s)}{D(s)}$ e $H(s) = 1$ as funções de transferência do processo, do controlador e do sensor, respectivamente, onde $A(s)$, $B(s)$, $D(s)$, $E(s)$ são polinômios de graus n_g , m_g , n_c , m_c respectivamente. Além disso, $D(s)$ e $A(s)$ são polinômios mônicos, isto é, polinômios cujo coeficiente do termo de mais alto grau é unitário. Os polinômios podem ser escritos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} A(s) &= s^{n_g} + a_{n_g-1}s^{n_g-1} + \dots + a_1s + a_0 \\ B(s) &= b_{m_g}s^{m_g} + b_{m_g-1}s^{m_g-1} + \dots + b_1s + b_0 \\ D(s) &= s^{n_c} + d_{n_c-1}s^{n_c-1} + \dots + d_1s + d_0 \\ E(s) &= e_{m_c}s^{m_c} + e_{m_c-1}s^{m_c-1} + \dots + e_1s + e_0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Os polinômios $A(s)$ e $B(s)$ são dados, enquanto que os polinômios $D(s)$ e $E(s)$ constituem a função de transferência do controlador, a ser determinada. O método de alocação de pólos consiste em determinar os parâmetros do controlador, ou seja, os coeficientes dos polinômios $D(s)$ e $E(s)$, de tal forma que os pólos da função de transferência em laço fechado $T(s)$ estejam em posições previamente especificadas.

A função de transferência em laço fechado pode ser escrita como:

$$T(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{B(s)E(s)}{B(s)E(s) + A(s)D(s)}$$

onde $P(s)$ e $Q(s)$ são polinômios. Os pólos escolhidos para $T(s)$ determinam o polinômio característico desejado em malha fechada $Q(s)$. Tem-se então a seguinte equação:

$$B(s)E(s) + A(s)D(s) = Q(s) \tag{5.2}$$

conhecida como *equação diofantina*. Nessa equação, $Q(s)$, $B(s)$ e $A(s)$ são polinômios conhecidos, enquanto $D(s)$ e $E(s)$ são os polinômios da função de transferência do controlador, que devem ser determinados de forma a satisfazer esta equação. A alocação dos pólos de laço fechado nas posições desejadas é obtida pela solução da equação (5.2).

Sejam p_1, p_2, \dots, p_n os valores escolhidos para os pólos de malha fechada, todos com parte real negativa. Então o polinômio desejado para o sistema em laço fechado é dado por:

$$Q(s) = \prod_{i=1}^n (s - p_i) = s^n + q_{n-1}s^{n-1} + \dots + q_1s + q_0 \quad (5.3)$$

Substituindo (5.1) e (5.3) em (5.2) tem-se:

$$\begin{aligned} s^n + q_{n-1}s^{n-1} + \dots + q_1s + q_0 &= \\ &= (b_{m_g}s^{m_g} + \dots + b_1s + b_0)(e_{m_c}s^{m_c} + \dots + e_1s + e_0) + \\ &+ (s^{n_g} + \dots + a_1s + a_0)(s^{n_c} + \dots + d_1s + d_0) \end{aligned} \quad (5.4)$$

É importante notar que o número de pólos do sistema é igual ao número de pólos do controlador mais o número de pólos do processo. Isto é, a ordem do polinômio $Q(s)$ deverá ser igual à soma das ordens dos polinômios $D(s)$ e $A(s)$: $n = n_g + n_c$.

Equacionando os coeficientes de mesmo grau em (5.4) obtém-se um sistema de equações lineares onde as incógnitas são os coeficientes dos polinômios $D(s)$ e $E(s)$. Resolvendo esse sistema de equações tem-se os valores destes coeficientes e, portanto, a função de transferência do controlador. Para que este sistema de equações tenha solução e esta solução seja única, a ordem de cada um dos polinômios $D(s)$ e $E(s)$ deve ser escolhida adequadamente. Vê-se em (5.4) que o número de equações deste sistema é igual a $n = n_g + n_c$. Já o número de incógnitas é igual ao número de coeficientes a serem determinados na função de transferência do controlador. Supondo que todos os parâmetros da função de transferência do controlador possam ser livremente escolhidos, o que nem sempre é o caso, esse número de incógnitas será igual a $n_c + m_c + 1$. Então, para que o sistema tenha solução única, é conveniente escolher as ordens dos polinômios de forma que $n_g + n_c = n_c + m_c + 1$, ou seja, $m_c = n_g - 1$. Por outro lado, é necessário que $n_c \geq m_c$ para que a função de transferência seja implementável. Escolhendo o controlador de ordem mínima, tem-se $n_c = m_c = n_g - 1$, ou seja, a ordem do controlador deve ser igual à ordem do processo menos um.

- Se $n_c = m_c = n_g - 1$, então a equação diofantina (5.2) tem solução para quaisquer pólos de laço fechado p_1, p_2, \dots, p_n , ou

seja, é possível obter pólos de laço fechado em qualquer posição desejada do plano complexo.

- Se um controlador de ordem inferior à do processo for utilizado ($n_c < n_g - 1$), então a existência de solução para a equação diofantina dependerá da escolha feita para os pólos de laço fechado; para algumas escolhas a equação teria solução e para outras não. Nesse caso, é possível determinar quais são as posições possíveis para os pólos de laço fechado por meio do método do lugar das raízes.
- Se um controlador de ordem superior à do processo for utilizado ($n_c > n_g - 1$), então a equação diofantina terá mais incógnitas do que equações e haverá mais de um controlador que resultará nos mesmos pólos de laço fechado.

Lembre que essas conclusões são válidas se todos os parâmetros da função de transferência do controlador podem ser arbitrariamente escolhidos. Se esse não for o caso, o mesmo raciocínio se aplica, chegando porém a conclusões distintas, como apresentado a seguir para controladores PID.

5.2.1 Controladores PID

Nesta seção particularizamos o método da equação diofantina para o caso de um controlador PID. Considere a função de transferência ideal do controlador PID:

$$C(s) = K\left(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s}\right) = \frac{c_2 s^2 + c_1 s + c_0}{s} \quad (5.5)$$

onde:

$$c_2 = KT_d \quad (5.6)$$

$$c_1 = K \quad (5.7)$$

$$c_0 = \frac{K}{T_i} \quad (5.8)$$

O pólo que limita o ganho de alta frequência da ação derivativa é desconsiderado para o ajuste. Para efeitos de simplificação de projeto,

assume-se que o mesmo está em uma frequência suficientemente alta, de forma que sua influência na zona de baixas frequências, onde a ação do controlador será predominante, é desprezível. É importante notar também que, na maioria dos controladores PID comerciais, o valor do pólo limitador é fixo pelo fabricante e seu valor nem sempre é informado. Obviamente, se o pólo for conhecido e/ou puder ser alterado (for um parâmetro de projeto), esta informação pode ser incorporada na análise seguindo a mesma linha de raciocínio a ser apresentada na seqüência.

A função de transferência (5.5) tem apenas três parâmetros que podem ser ajustados. Fazendo uma análise similar àquela apresentada na seção anterior, conclui-se que um controlador PID somente pode alocar arbitrariamente os pólos de um processo de ordem inferior ou igual a dois. Por outro lado, grande parte dos processos pode ser modelado aproximadamente por uma função de transferência de ordem dois, o que explica de certa forma o sucesso dos controladores PID em aplicações industriais.

Considere que o modelo do processo é dado por uma função de transferência estritamente própria⁶ de segunda ordem:

$$G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \quad (5.9)$$

Considerando então $G(s)$ e $C(s)$ dadas respectivamente pelas funções (5.9) e (5.5), a função de transferência do sistema em malha fechada é dada por:

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)} = \\ &= \frac{b_1 c_2 s^3 + (b_1 c_1 + b_0 c_2) s^2 + (b_1 c_0 + b_0 c_1) s + b_0 c_0}{(b_1 c_2 + 1) s^3 + (b_1 c_1 + b_0 c_2 + a_1) s^2 + (b_1 c_0 + b_0 c_1 + a_0) s + b_0 c_0} \end{aligned}$$

O método de alocação de pólos consiste em determinar os parâmetros do controlador de tal forma que os pólos de $T(s)$ estejam em posições previamente especificadas. Os pólos assim escolhidos determinam o polinômio característico de malha fechada $Q(s)$. Sejam p_1 , p_2 e p_3 os valores escolhidos para os pólos de malha fechada, todos

⁶Uma função de transferência estritamente própria é aquela em que o grau do polinômio do numerador é menor do que o grau do polinômio do denominador.

Capítulo 5 Alocação de pólos

com parte real negativa. Então o polinômio desejado é:

$$\begin{aligned} Q(s) &= (s - p_1)(s - p_2)(s - p_3) = s^3 + q_2s^2 + q_1s + q_0 \\ q_2 &= |p_1| + |p_2| + |p_3| \\ q_1 &= |p_1||p_2| + |p_1||p_3| + |p_2||p_3| \\ q_0 &= |p_1||p_2||p_3| \end{aligned}$$

O ajuste do PID se resume a calcular os parâmetros c que satisfazem à equação diofantina:

$$\begin{aligned} (b_1c_2 + 1)s^3 + (b_1c_1 + b_0c_2 + a_1)s^2 + (b_1c_0 + b_0c_1 + a_0)s + \\ + b_0c_0 = (b_1c_2 + 1) \cdot Q(s) \end{aligned}$$

Igualando-se os coeficientes de mesmo grau devemos ter

$$\begin{aligned} b_1c_1 + b_0c_2 + a_1 &= (b_1c_2 + 1)q_2 \\ b_1c_0 + b_0c_1 + a_0 &= (b_1c_2 + 1)q_1 \\ b_0c_0 &= (b_1c_2 + 1)q_0 \end{aligned}$$

Então as variáveis c_0, c_1, c_2 podem ser obtidas através da solução do seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} b_1c_1 + (b_0 - b_1q_2)c_2 = q_2 - a_1 \\ b_1c_0 + b_0c_1 - b_1q_1c_2 = q_1 - a_0 \\ b_0c_0 - b_1q_0c_2 = q_0 \end{cases} \quad (5.10)$$

Os parâmetros do PID podem ser calculados a partir das equações (5.6)-(5.8):

$$K = c_1 \quad (5.11)$$

$$T_d = \frac{c_2}{K} \quad (5.12)$$

$$T_i = \frac{K}{c_0} \quad (5.13)$$

O ajuste por alocação de pólos de um controlador PID pelo método da equação diofantina consiste, portanto, em proceder aos seguintes passos:

- 1) obter um modelo matemático de ordem menor ou igual a dois para o processo;
- 2) escolher os pólos de $T(s)$ para satisfazer às especificações de desempenho transitório;
- 3) calcular os coeficientes c resolvendo o sistema de equações (5.10);
- 4) calcular os parâmetros do controlador a partir de (5.11)-(5.13).

Exemplo 5.1 Considere o controle de velocidade por tensão de um motor CC, modelado como no Capítulo 4, com a seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{\omega(s)}{E_a(s)} = \frac{1500}{s^2 + 50,1 s + 275} \frac{\text{rpm}}{\text{V}}$$

Os pólos do processo são dados por $p_1 = -6,275 \text{ s}^{-1}$ e $p_2 = -43,83 \text{ s}^{-1}$. Portanto, o processo apresenta um tempo de acomodação em malha aberta da ordem de 640 ms ($= \frac{4}{6,275}$).

Deseja-se que o sistema em malha fechada seja capaz de seguir referências constantes com erro nulo em regime permanente e rejeição a perturbações de carga constantes. Como especificações de desempenho transitório coloca-se um tempo de acomodação desta mesma ordem, sendo aceitável uma pequena sobrepassagem: $t_s < 1 \text{ s}$ e $Mo < 10\%$. Essas especificações podem ser satisfeitas com a utilização de um controlador PID determinado como segue.

Os pólos dominantes serão escolhidos reais, o que, se verificada a dominância, garantiria sobrepassagem nula. Para atender à especificação de t_s devemos ter $|p_d| > 4 \text{ s}^{-1}$. Vamos então alocar um pólo dominante em $p_1 = -5 \text{ s}^{-1}$ e os pólos restantes três oitavas acima, em $p_2 = p_3 = -40 \text{ s}^{-1}$. Assim, o polinômio característico desejado para o sistema controlado é:

$$Q(s) = (s + 5)(s + 40)^2 = s^3 + 85 s^2 + 2000 s + 8000$$

Devemos então satisfazer:

$$s(s^2 + 50,1 s + 275) + 1500(c_2 s^2 + c_1 s + c_0) = s^3 + 85 s^2 + 2000 s + 8000$$

Capítulo 5 Alocação de pólos

Resolvendo o sistema de equações (5.10) obtém-se:

$$c_2 = 0,02327 \quad c_1 = 1,15 \quad c_0 = 5,333$$

Finalmente, calculando os parâmetros do controlador a partir de (5.11), (5.12) e (5.13) obtém-se:

$$K = 1,15 \frac{\text{V}}{\text{rpm}} \quad T_i = 216 \text{ ms} \quad T_d = 20,2 \text{ ms}$$

As Figuras 5.1 e 5.2 ilustram o desempenho do sistema em malha fechada. O sistema está inicialmente operando a uma velocidade de 1.000 rpm com torque de carga nulo; em $t = 1$ s a referência de velocidade é aumentada para $\omega_{ref} = 1.100$ rpm e em $t = 2$ s um torque de carga é aplicado. A velocidade $\omega(t)$ resultante é apresentada na Figura 5.1, enquanto a Figura 5.2 apresenta o esforço de controle resultante, isto é, a tensão de armadura $E_a(t)$ aplicada ao motor. O desempenho obtido satisfaz aos requisitos e a tensão atinge o valor máximo de 530 V.

Teoricamente, a resposta do sistema pode ser tornada tão rápida quanto desejado, pois os pólos de $T(s)$ podem ser alocados em qualquer posição do plano complexo. Porém, existem restrições práticas, a principal delas referente ao esforço de controle. Suponha que para este mesmo sistema deseja-se obter uma resposta transitória duas vezes mais rápida, porém a máxima tensão que pode ser aplicada ao motor é de 600 V. Os pólos são alocados com valores duas vezes maiores do que anteriormente: o pólo dominante é alocado em $p_1 = -10 \text{ s}^{-1}$, e os pólos restantes são $p_2 = p_3 = -80 \text{ s}^{-1}$. Então devemos ter:

$$s(s^2 + 50,1s + 275) + 1500(c_2s^2 + c_1s + c_0) = s^3 + 170s^2 + 8.000s + 64.000$$

onde obtém-se $c_0 = 42,67$, $c_1 = 5,15$, $c_2 = 0,0799$. Calculando então os parâmetros do controlador, tem-se:

$$K = 5,15 \frac{\text{V}}{\text{rpm}} \quad T_i = 0,1207 \text{ s} \quad T_d = 15,5 \text{ ms}$$

As Figuras 5.3 e 5.4 apresentam a resposta do sistema à mesma excitação anterior. Compare o desempenho transitório e o esforço de

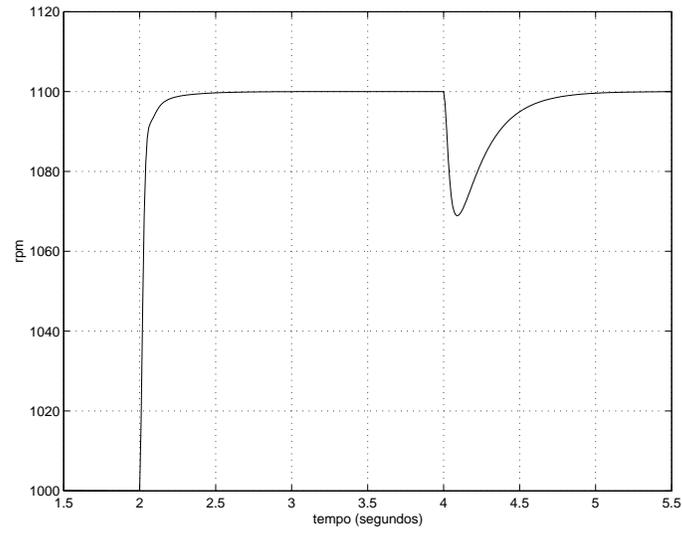


Figura 5.1 - Velocidade do motor CC

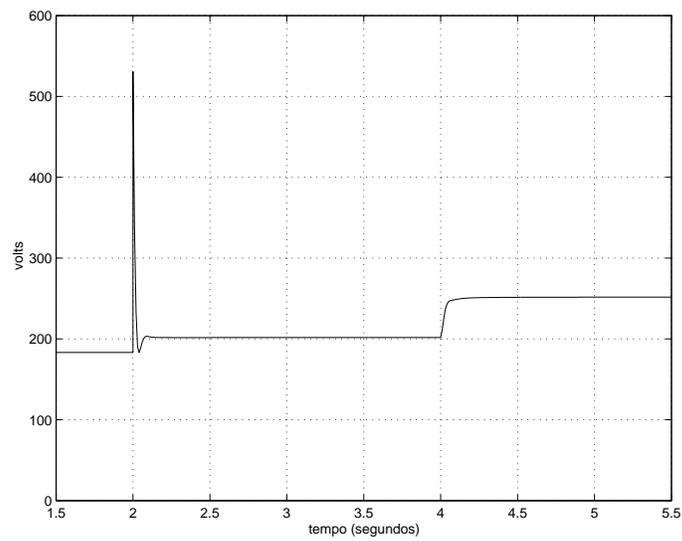


Figura 5.2 - Tensão de armadura (variável manipulada) do motor CC

Capítulo 5 Alocação de pólos

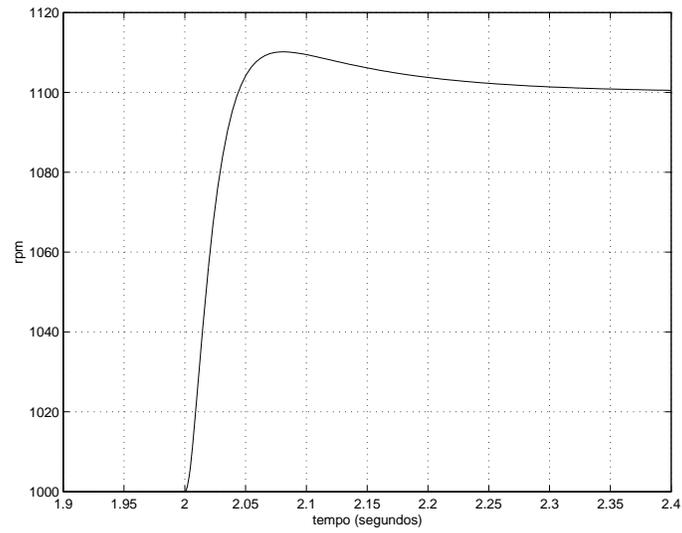


Figura 5.3 - Velocidade do motor CC

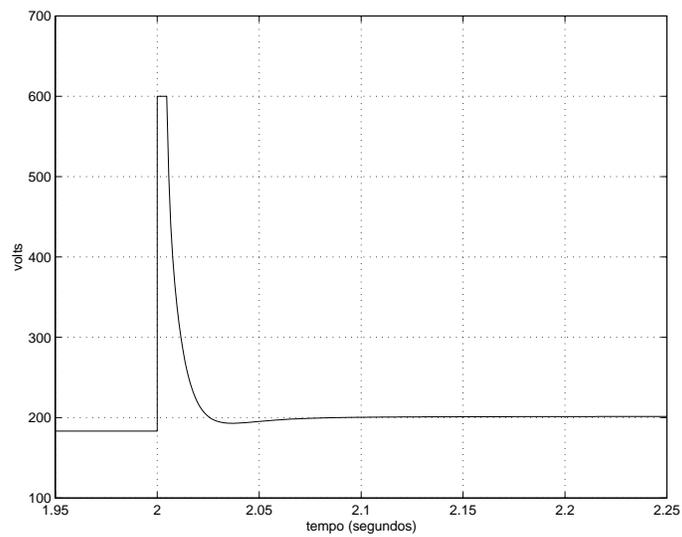


Figura 5.4 - Tensão de armadura (variável manipulada) do motor CC

controle (E_a) desenvolvido pelo controlador com o caso anterior. O sinal de controle atinge seu valor máximo e satura, de forma que a melhoria esperada em desempenho transitório não é alcançada e o atuador está sendo sobrecarregado inutilmente.

O exemplo ilustra um princípio importante no projeto de sistemas de controle e muito presente no ajuste por alocação de pólos: a relação entre o desempenho transitório desejado para o sistema e a amplitude do sinal de controle necessário para atingi-lo, também chamado de esforço de controle. *Quanto maior a diferença entre os pólos de $T(s)$ e os pólos de laço aberto do processo, maior será o esforço de controle.*

Além disso, como o esforço de controle é limitado por restrições físicas, existem limites práticos para a escolha das posições dos pólos de malha fechada. Esses não devem ser escolhidos excessivamente afastados dos pólos de malha aberta, pois nesse caso o sistema sairia facilmente de sua banda proporcional (o controle atingiria facilmente seus limites), como no último exemplo, exibindo comportamento não-linear e muito provavelmente não alcançando o desempenho transitório desejado. Este aspecto não-linear é discutido em maior detalhe no Capítulo 7.

A tarefa de quantificar os limites atingíveis de desempenho é complexa e por esta razão a escolha dos pólos de malha fechada envolve experiência e conhecimento do processo controlado. Portanto, os pólos de malha fechada devem ser escolhidos de forma a fornecer a resposta transitória desejada e levando em conta estas restrições, de forma a não realizar esforço de controle inútil. O esforço de controle não deve ser desperdiçado, uma vez que apresenta um custo, que se manifesta principalmente sob dois aspectos: desgaste do atuador e dispêndio de energia.

5.3 Método do lugar das raízes

Considere o sistema de controle mostrado na Figura 5.5. Os pólos da função de transferência de malha fechada $T(s)$ são dados pelas raízes

Capítulo 5 Alocação de pólos

da equação característica $(1 + C(s)G(s)H(s) = 0)$ que depende diretamente da função de transferência de laço $(C(s)G(s)H(s))$. Assim, a variação de um parâmetro na função de transferência de laço fará com que os pólos de $T(s)$ sejam modificados e conseqüentemente acarretará uma modificação na resposta transitória do sistema. Comumente esse parâmetro que varia pode ser de dois tipos:

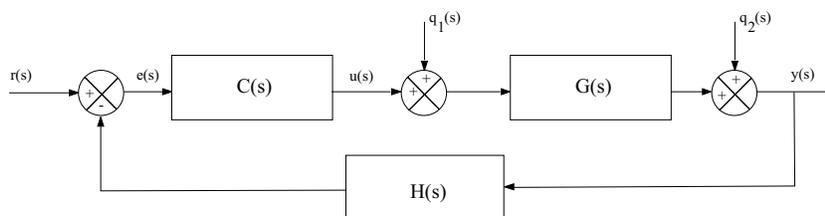


Figura 5.5 - Sistema realimentado

- um ganho ou um parâmetro de sintonia do controlador, o qual é variado voluntariamente pelo operador;
- um parâmetro do processo que varie ao longo do tempo (em função de desgastes mecânicos, variações de temperatura, etc.), acarretando a variação de um dos coeficientes do numerador ou do denominador de $G(s)$.

A fim de obter-se uma boa sintonia do sistema, com um bom desempenho transitório, é de grande importância conhecer de que forma a variação de um determinado parâmetro irá influenciar, qualitativa e quantitativamente, a posição dos pólos da $T(s)$. Esta necessidade se torna clara, por exemplo, na hora de responder à seguinte questão: *deve-se aumentar ou reduzir este parâmetro do controlador a fim de melhorar a resposta do sistema?*

É de grande valia uma ferramenta gráfica que permita a visualização da tendência de variação dos pólos da $T(s)$ na medida em que o parâmetro variável na função de laço aumenta ou diminui. Tal ferramenta constitui-se no método do lugar das raízes, que será apresentado nesta seção. Para compreender a finalidade e a utilização desse método, considere o exemplo a seguir.

Tabela 5.2 - Pólos de malha fechada em função do ganho K

K	pólos
0,1	(-0,1010; -9,8990)
1	(-1,1270 ; -8,8730)
1,5	(-2,7639; -7,2361
2,5	(-5; -5)
5	(-5+j5; -5-j5)
10	(-5 + j8,6603 ; -5 - j8,6603)

Exemplo 5.2 O diagrama de blocos da Figura 5.6 representa o controle de posição do eixo de um motor CC através de um controlador proporcional ($C(s) = K$).

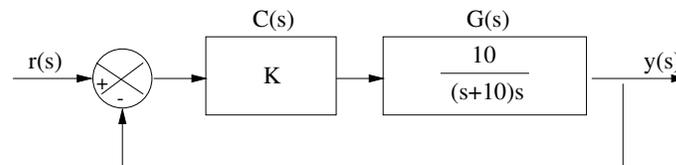


Figura 5.6 - Controle proporcional de posição de um motor CC

Tem-se que:

$$T(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{10K}{s^2 + 10s + 10K}$$

Claramente, ao variarmos o ganho proporcional do controlador, estaremos alterando os pólos da $T(s)$. A Tabela 5.2 mostra os valores dos pólos do sistema à medida que K vai sendo aumentado.

Analisando a posição dos pólos pela tabela pode-se observar que:

- para $0 < K < 2,5$ ambos os pólos da $T(s)$ são reais, para ganhos baixos temos um dos pólos da $T(s)$ bem próximo de zero e o outro

Capítulo 5 Alocação de pólos

bem próximo a -10 ; à medida que o ganho vai sendo aumentado, ambos os pólos aproximam-se do valor -5 ;

- para $K = 2,5$ ambos os pólos do sistema estão em -5 (pólos reais duplos);
- para $K > 2,5$ os pólos se tornam complexos; à medida que K aumenta, a parte imaginária vai crescendo e a parte real mantém-se constante e igual a -5 .

Essas observações ficam mais fáceis de serem visualizadas plotando-se, no plano complexo, o valor das raízes para cada valor de K , como é mostrado na Figura 5.7. Extrapolando-se para outros valores de K e usando setas para indicar a variação das posições das raízes com o aumento de K temos o gráfico da Figura 5.8.

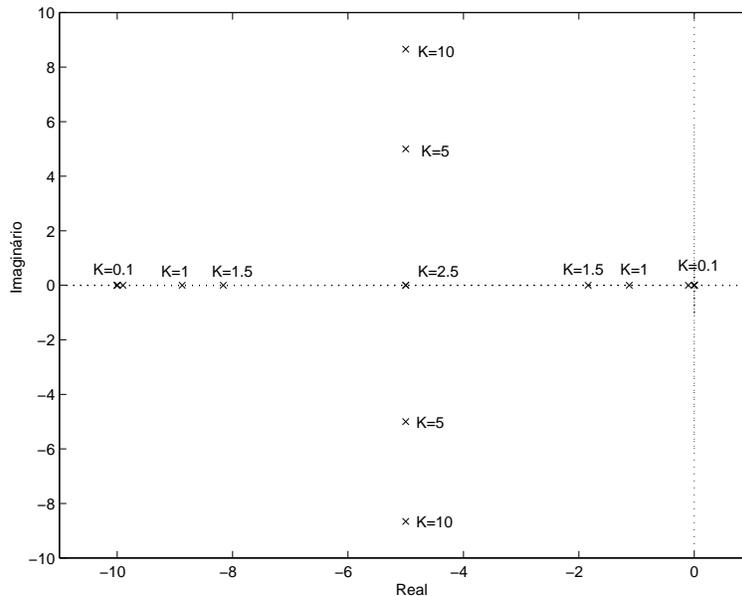


Figura 5.7 - Posição dos pólos de laço fechado no plano complexo para diferentes valores do ganho K

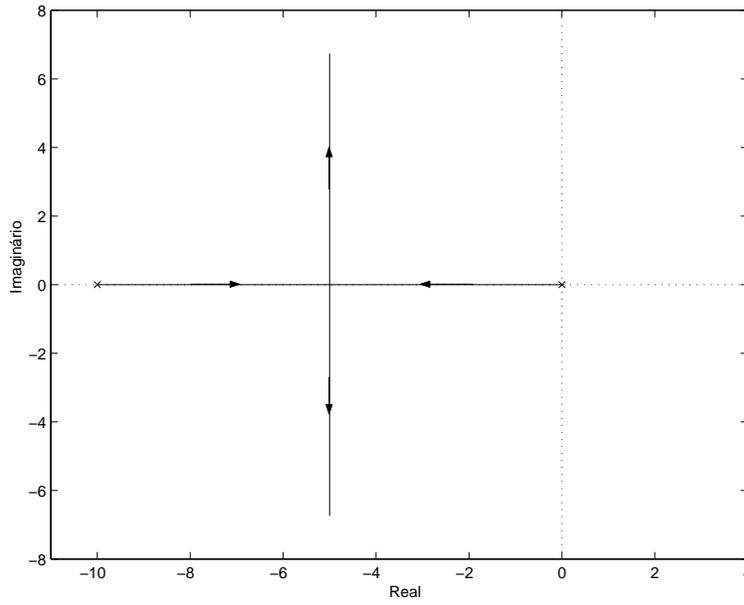


Figura 5.8 - Variação da posição dos pólos de laço fechado com a variação do ganho K

A partir da observação qualitativa do gráfico, pode-se prever o que ocorrerá com a resposta do sistema à medida que aumentamos o ganho do controlador.

- Para ganhos baixos, o sistema em malha fechada apresentará um pólo próximo ao eixo imaginário (pólo dominante) e o sistema deverá apresentar um tempo de acomodação muito grande.
- À medida que aumentamos o ganho, a resposta deve tornar-se mais rápida, pois o pólo dominante se afasta do eixo imaginário. A partir de um determinado ganho, o sistema apresentará pólos complexos e a resposta deverá começar a apresentar uma oscilação amortecida, o tempo de subida deverá diminuir, mas o tempo de acomodação deverá permanecer aproximadamente o mesmo.

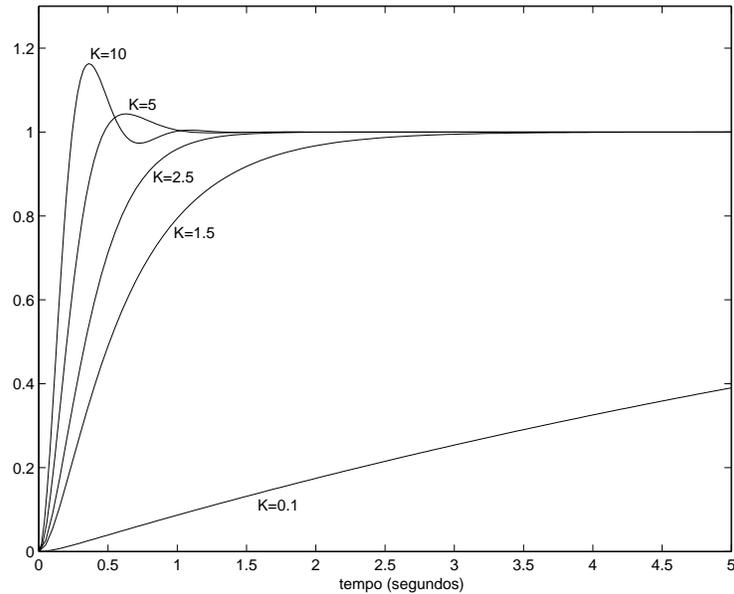


Figura 5.9 - Resposta do sistema conforme K

- Se aumentarmos o ganho em demasia, o sistema apresentará pólos complexos conjugados cuja parte imaginária será muito maior que a parte real, o que conferirá um baixo amortecimento e altos valores de sobrepasso à resposta.

No gráfico da Figura 5.9 são apresentadas as respostas do sistema a um salto unitário, considerando-se diferentes valores de K . Pode-se notar que as previsões mencionadas são confirmadas.

Como será visto a seguir, o gráfico traçado na Figura 5.8 corresponde ao *lugar das raízes*, com relação ao parâmetro $K > 0$, do polinômio:

$$Q(s) = s^2 + 10s + 10K$$

ou, equivalentemente, da função

$$1 + KF(s) = 1 + K \frac{10}{s(s+10)}$$

5.3.1 Definição do lugar das raízes

Sejam $F(s)$ uma função racional⁷ na variável s e K um parâmetro real variável estritamente positivo (isto é, $K > 0$). Considerando a equação:

$$1 + KF(s) = 0 \quad (5.14)$$

define-se o lugar das raízes desta equação como segue.

Definição - o lugar das raízes da equação (5.14) é o lugar geométrico⁸ dos pontos do plano complexo que satisfazem a equação (5.14) para K variando de zero a infinito.

Em outras palavras:

- um ponto λ do plano complexo pertence ao lugar das raízes da equação (5.14) se, e somente se, existe um K tal que a equação (5.14) é satisfeita para $s = \lambda$;
- para um dado $K > 0$ os pontos $s = \lambda_i$, $i = 1, \dots, n$, onde n é o grau do polinômio do numerador de $1 + KF(s)$, que verificam a equação (5.14), pertencem ao lugar das raízes de (5.14).

Retomando o exemplo (5.2), note que:

$$F(s) = \frac{10}{s(s+10)}$$

e assim, para um K fixo, o numerador de $1 + KF(s)$ é dado pelo polinômio $s^2 + 10s + 10K$, cujas raízes são as mesmas raízes de $1 + KF(s)$.

Sendo s um número complexo, $F(s)$ também o será. A partir da definição dada, podemos concluir que, se um ponto s do plano complexo pertence ao lugar das raízes, então devemos ter

$$F(s) = -\frac{1}{K}$$

⁷Função cujo numerador e o denominador são polinômios.

⁸Conjunto de pontos que satisfazem uma certa propriedade.

Ou, de forma equivalente, as condições a seguir são satisfeitas:

- condição de módulo: $|F(s)| = \frac{1}{K}$
- condição de ângulo: $\angle F(s) = \pm 180^\circ$

Note que, uma vez que a condição de ângulo é satisfeita para um determinado ponto s do plano complexo, sempre existirá um ganho K que verificará a condição de módulo. Com base nesse fato pode-se formular uma definição alternativa à definição anterior do lugar das raízes.

Definição - O lugar das raízes da equação (5.14) é o conjunto de pontos do plano complexo que satisfazem $\angle F(s) = \pm 180^\circ$.

5.3.2 Regras de construção

As condições de módulo e ângulo servem de base para o estabelecimento de regras genéricas que permitem um rápido esboço do lugar das raízes e a identificação de seus pontos mais relevantes. Essas regras podem ser deduzidas da sua definição de forma direta, conforme apresentado em livros clássicos de teoria de sistemas como Haykin; Veen (2001); Franklin; Powell; Naeini (1994). Considere que o numerador de $F(s)$ é um polinômio de grau m e que o denominador de $F(s)$ é um polinômio de grau n .

- 1) Os pólos de $F(s)$ são marcados com \times e os zeros com \circ .
- 2) Os pontos de origem ($K \rightarrow 0$) do lugar das raízes são os pólos de $F(s)$.
- 3) O número de ramos do lugar das raízes é igual ao máximo entre n e m .
- 4) Os pontos terminais ($K \rightarrow \infty$) são os zeros de $F(s)$. No caso em que o número de zeros de $F(s)$ é menor que o número de pólos (isto é, $n > m$) diz-se que $n - m$ zeros de $F(s)$ estão no infinito. Nesse caso teremos $n - m$ pólos de $1 + KF(s)$ que tenderão ao infinito ($s \rightarrow \infty$) quando $K \rightarrow \infty$. Reciprocamente, quando $m > n$, teremos $m - n$ pólos que partirão do infinito

quando $K \rightarrow 0$. Em ambos os casos, diz-se que o lugar das raízes apresenta $|n - m|$ assíntotas.

- 4.1) A interseção das assíntotas tem lugar sobre o eixo real do plano complexo.
- 4.2) O ponto de interseção das assíntotas sobre o eixo real é calculado como:

$$\sigma = \frac{\sum (\text{pólos de } F(s)) - \sum (\text{zeros de } F(s))}{|n - m|}$$

- 4.3) Os ângulos formados pelas assíntotas e o eixo real são dados por:

$$\theta_i = \frac{(2i + 1)\pi}{n - m} \text{ rad para } i = 0, 1, \dots, (n - m - 1)$$

- 5) O lugar das raízes é simétrico com relação ao eixo real. Isso se justifica facilmente pelo fato de que se $s = a + jb$ é raiz da equação (5.14), seu complexo conjugado $s = a - jb$ também o é.
- 6) Um ponto do eixo real do plano complexo pertence ao lugar das raízes se o número total de pólos e zeros de $F(s)$ à direita deste ponto for ímpar.
- 7) Os pontos de entrada e/ou saída do eixo real são pontos pertencentes ao(s) ramo(s) sobre o eixo real do lugar das raízes e que satisfazem:

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{F(s)} \right) = 0 \quad (5.15)$$

- 8) Os pontos em que o lugar das raízes cruza o eixo imaginário⁹ podem ser determinados a partir do critério de estabilidade de Routh e Hurwitz (Haykin; Veen (2001)).

⁹Tais pontos são de fundamental importância na análise de estabilidade em sistemas realimentados, pois correspondem ao valor crítico de ganho para o qual o sistema realimentado passa da estabilidade à instabilidade.

Capítulo 5 Alocação de pólos

- 9) O valor de K em qualquer ponto $s = \lambda$ pertencente ao lugar das raízes é determinado pela condição de módulo:

$$K = \frac{1}{|F(\lambda)|}$$

Exemplo 5.3 Aplicando as regras expostas ao caso do exemplo 5.2 temos que:

- $F(s) = \frac{10}{s(s+10)}$ e, portanto, tem-se 2 pólos (em 0 e -10) e nenhum zero, ou seja, $n = 2$ e $m = 0$;
- o lugar das raízes começa nos pólos 0 e -10 ;
- como não há zeros, o lugar das raízes apresenta 2 assíntotas $n - m = 2 - 0 = 2$:
 - o centro das assíntotas é igual a $\frac{-10+0}{2-0} = -5$.
 - os ângulos que as assíntotas fazem com o eixo real são dados por:

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \quad \theta_1 = \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$$

- o lugar das raízes apresenta 2 ramos ($n = 2$);
- o lugar das raízes é simétrico com relação ao eixo real;
- para pontos sobre o eixo real à direita de 0, não existe nenhuma singularidade, portanto tais pontos não fazem parte do lugar das raízes; pontos no eixo real entre 0 e -2 apresentam sempre um número ímpar de singularidades (pólo em 0) à sua direita e, portanto, fazem parte do lugar das raízes; finalmente, pontos sobre o eixo real à esquerda de -10 apresentam número par de singularidades (pólos em 0 e -10), logo não pertencem ao lugar das raízes;
- os pontos de entrada e/ou saída do eixo real são os pontos que verificam a equação (5.15), ou seja:

$$\frac{d(s(s+10))}{ds} = 2s + 10 = 0$$

nesse caso tem-se que $s = -5$ verifica a esta equação e como $s = -5$ está sobre uma região do eixo real que pertence ao lugar das raízes e como existem duas assíntotas, podemos concluir que este ponto é um ponto de saída do eixo real;

- como os ângulos de partida das assíntotas são 90° e 270° e o centro das assíntotas é no ponto -5 , podemos inferir que estas são ortogonais ao eixo real e, portanto, o lugar das raízes nunca cruzará o eixo imaginário, o que nos permite concluir para qualquer ganho nunca teremos raízes de $1 + KF(s)$ no semiplano direito; tal inferência pode ser comprovada matematicamente aplicando-se o critério de Routh e Hurwitz;
- o ganho necessário para colocar um pólo do sistema em malha fechada em -5 será:

$$K = \left| \frac{s(s+10)}{10} \right|_{s=-5} = \left| \frac{-5(-5+10)}{10} \right| = 2,5$$

note que esse é o ganho para o qual a resposta do sistema em malha fechada terá o menor tempo de acomodação sem apresentar sobrepasso.

Compare esse resultado com as regras e com aquele obtido numericamente no exemplo 5.2.

5.3.3 Aplicação a sistemas realimentados

Cabe ressaltar que a definição do lugar das raízes é puramente matemática, ou seja, é um conjunto de pontos s que verificam a equação $1 + KF(s) = 0$. Entretanto, sua aplicação a sistemas realimentados é evidente, como foi discutido nas seções precedentes e no exemplo 5.2. Serão várias as ocasiões onde estaremos interessados em visualizar de que forma a variação de um parâmetro no sistema afeta sua equação característica, ou seja, os pólos da função de transferência em malha fechada e, conseqüentemente, ter uma idéia qualitativa da

Capítulo 5 Alocação de pólos

variação no desempenho dinâmico do sistema causada por variações neste parâmetro.

Assim, o lugar das raízes é uma importante ferramenta matemática para análise e projeto de controladores. A seguir, ilustraremos três aplicações do lugar das raízes neste contexto. Em todos os casos considere o diagrama em blocos da Figura 5.10.

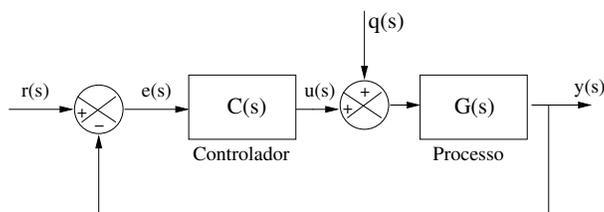


Figura 5.10 - Sistema realimentado

Varição do ganho do controlador - este caso corresponde ao caso estudado no exemplo 5.2. A função de transferência do controlador pode ser escrita como $C(s) = K\bar{C}(s)$, onde K é um ganho variável ou ajustável. Assim sendo, tem-se que a equação característica é dada por:

$$1 + K\bar{C}(s)G(s) = 0$$

ou seja, $F(s) = \bar{C}(s)G(s)$.

Varição de um parâmetro do controlador - muitas vezes se está interessado em avaliar o efeito de um determinado parâmetro do controlador (diferente de um ganho multiplicativo) no comportamento dinâmico do sistema. Este é o caso, por exemplo, que ocorre quando se deseja saber a influência da variação do ganho integral ($\frac{1}{T_i}$) ou do ganho derivativo (T_d) em controladores PID. Nesse caso, devemos reescrever a equação característica de forma a colocá-la na forma (5.14) onde K é o parâmetro que varia, como ilustrado no exemplo a seguir.

Exemplo 5.4 Seja o sistema da Figura 5.10 com:

$$G(s) = \frac{5}{(s+2)(s+10)}$$

e o controlador sendo um controlador PI

$$C(s) = K\left(1 + \frac{K_i}{s}\right)$$

Considerando $K = 10$, deseja-se avaliar o que ocorre com os pólos do sistema em malha fechada quando variamos o parâmetro K_i .

A função de transferência entre a referência e a saída é dada por:

$$T(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{50(s + K_i)}{s^3 + 12s^2 + 70s + 50K_i}$$

A equação característica é dada por:

$$(s^3 + 12s^2 + 70s) + 50K_i = 0$$

Para que se possa avaliar o comportamento dos pólos da função de transferência com a variação do ganho integral K_i , deve-se colocar a equação característica na forma $1 + K_i F(s) = 0$. Para tanto deve-se dividir ambos os lados da equação pelo polinômio $(s^3 + 12s^2 + 70s)$ obtendo-se:

$$1 + K_i \frac{50}{s^3 + 12s^2 + 70s} = 0$$

Assim, aplicando-se as regras de construção apresentadas na seção anterior com $F(s) = \frac{50}{s^3 + 12s^2 + 70s}$, obtém-se o lugar das raízes com relação ao parâmetro K_i , mostrado na Figura 5.11.

Ao aumentarmos em demasia o ganho integral, o sistema tornar-se-á instável (o par de pólos complexos conjugados passará para o semiplano direito). O ganho crítico, obtido pelo critério de Routh e Hurwitz, é $K_i = 16,8$. Com esse ganho, os pólos de $T(s)$ são $\{j8,3666 ; -j8,3666 ; -12\}$.

Capítulo 5 Alocação de pólos

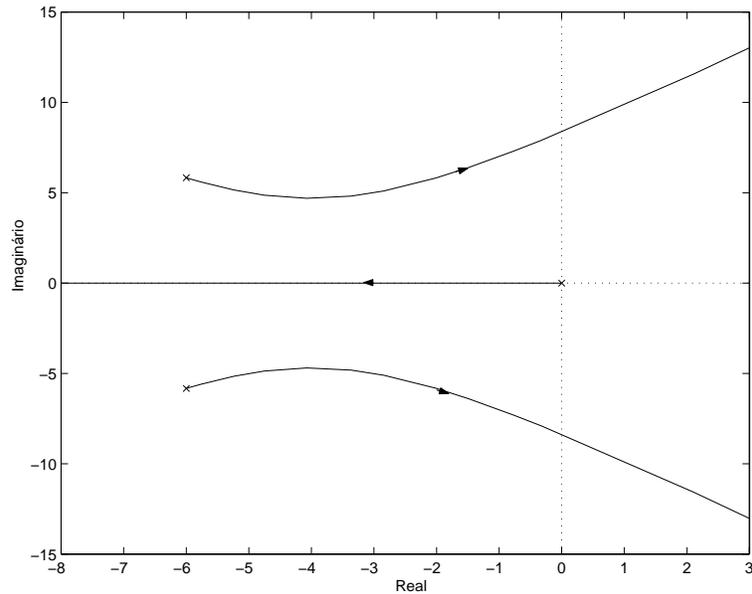


Figura 5.11 - Lugar das raízes com relação ao parâmetro K_i

Considere o caso em que $1 + KF(s) = 1 + K\bar{C}(s)G(s)$. Ao alterarmos a posição dos pólos e zeros de $\bar{C}(s)$, estaremos alterando o lugar das raízes com relação à variação do ganho K . Um perfeito conhecimento das regras de construção do lugar das raízes nos permite, rapidamente, determinar a quantidade de zeros e pólos que o controlador deve possuir bem como onde eles devem ser posicionados. Genericamente, o projeto do controlador pelo método do lugar das raízes consiste de duas etapas:

- 1) Escolha dos pólos e zeros do controlador - os pólos e zeros de $\bar{C}(s)$ devem ser escolhidos de forma que o lugar das raízes tenha uma determinada configuração, isto é, passe por posições desejáveis do plano complexo. Assim gera-se a possibilidade do sistema em malha fechada vir a apresentar pólo(s) dominante(s) em uma determinada posição.
- 2) Sintonia do ganho K - uma vez dada a possibilidade do sis-

tema em malha fechada apresentar pólo(s) em uma posição desejada, determina-se o ganho K para tanto através da condição de módulo. O ajuste de K deve ser tal que o sistema apresente pólos dominantes que propiciarão ao sistema em malha fechada uma boa resposta dinâmica.

Por exemplo, em controladores PID, tem-se sempre 1 pólo na origem, um pólo de alta frequência e 2 zeros. Na configuração padrão, através do ajuste dos ganhos T_i e T_d , o projetista tem a liberdade de escolher a posição dos dois zeros do controlador. Em alguns casos, terá também a liberdade de escolher a posição do pólo de alta frequência. Através então do ajuste do ganho proporcional (K) faz-se com que o sistema em malha fechada apresente pólos dominantes sobre o lugar das raízes definido pela equação característica $1 + K\bar{C}(s)G(s)$. Esse caso será discutido em detalhes na seção seguinte.

5.4 Ajuste pelo lugar das raízes

Note que, apesar do método de alocação de pólos descrito na seção 5.2 permitir o cálculo dos parâmetros do controlador em qualquer caso, os coeficientes de um controlador são limitados a certos valores válidos, e a obtenção de valores válidos não pode ser assegurada *a priori*. Por exemplo, em um controlador PID somente valores positivos para os ganhos K , T_i e T_d são válidos. Além disso, a existência de solução para a equação diofantina somente é garantida se o modelo do processo for de ordem suficientemente pequena. Para modelos de ordem superior à do controlador a probabilidade de encontrar valores válidos para os parâmetros do controlador que alocam os pólos de $T(s)$ em uma dada posição do plano complexo é virtualmente nula.

Tome-se como exemplo mais uma vez o controlador PID. Se o modelo do processo é de ordem superior a dois, com um controlador PID, os pólos de $T(s)$ somente podem ser alocados em determinadas posições do plano complexo. Nesse caso, ainda pode-se ajustar o PID pela alocação dos pólos de malha fechada, porém não é possível escolher arbitrariamente as posições dos pólos, mas apenas dentre aquelas posições possíveis. Aplica-se então o método do lugar das raízes para determinar quais são essas posições possíveis. O método do lugar das

raízes permite ainda obter uma estimativa do esforço de controle que será necessário para diferentes alocações de pólos escolhidas, o que não se tem com o método de alocação arbitrária de pólos.

Conforme visto na seção 5.3, o método do lugar das raízes permite analisar a influência da variação de um parâmetro do controlador sobre o desempenho transitório do sistema. Assim, se pode analisar o efeito do parâmetro K sobre os pólos de $T(s)$ e conseqüentemente sobre o desempenho transitório do sistema. A influência de qualquer outro parâmetro do controlador sobre o desempenho transitório do sistema também pode ser analisada desta forma. A partir dessa análise pode-se então escolher o valor para esse parâmetro que fornece o melhor desempenho possível. O exemplo a seguir exemplifica o procedimento.

Exemplo 5.5 Considere o motor CC com corrente de campo constante e laço de controle de corrente de armadura, de forma que a corrente de armadura é a variável manipulada. A função de transferência deste processo é:

$$G(s) = \frac{\omega(s)}{i_a(s)} = \frac{1,8}{s + 0,1}$$

O sistema deve seguir referências do tipo salto e rejeitar perturbações do mesmo tipo. Como o processo é de ordem 1, um controlador PI é suficiente para fornecer o desempenho estacionário e transitório desejado e por isso será aplicado a este processo, de forma que a função de transferência do controlador é dada por:

$$C(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) = K \frac{s + z}{s}$$

onde $z = \frac{1}{T_i}$ é a posição do zero do controlador. Há dois parâmetros a ajustar no controlador: z e K . Para aplicar o método do lugar das raízes, fixa-se um dos parâmetros e analisa-se a influência do outro sobre o desempenho do sistema. Uma escolha que simplifica a análise é alocar o zero do controlador na mesma posição do pólo dominante do processo, de forma a cancelá-lo. Fazendo $z = 0,1 \text{ s}^{-1}$ a função de transferência de malha fica:

$$L(s) = C(s)G(s) = K \frac{s + 0,1}{s} \frac{1,8}{s + 0,1} = 1,8K \frac{1}{s}$$

e a equação característica para o sistema em malha fechada:

$$1 + 1,8K \frac{1}{s} = 0$$

e é fácil verificar que o único pólo da função de transferência de malha fechada é igual a $-1,8 K$.

Quanto maior for o ganho K , mais rápida será a resposta do sistema, sempre mantendo a sobrepassagem nula. Porém, é necessário levar em conta as limitações de esforço de controle mencionadas anteriormente. Assim, se escolhe $K = 10/1,8 = 5,56$, que deverá fornecer a resposta transitória desejada ($t_s = 4/10 = 0,4$ s). A Figura 5.12 mostra a resposta ao salto de referência obtida com este ajuste simples, que é satisfatória. Porém, a resposta a perturbações de carga é bastante lenta, conforme mostrado na Figura 5.13, que considera a aplicação de uma perturbação de carga constante no instante $t = 0,5$ s. Note que a constante de tempo da resposta é dada pelo próprio pólo do processo. Este mau desempenho na resposta a perturbações deve-se ao cancelamento do pólo pelo zero do controlador. Com o cancelamento, esse pólo foi eliminado da função de transferência $T(s)$, mas não da função de transferência entre a perturbação e a saída, que é dada por:

$$\frac{\omega(s)}{T_m(s)} = \frac{\frac{1,8}{(s+0,1)}}{1 + K \frac{(s+0,1)}{s} \frac{1,8}{(s+0,1)}} = \frac{1,8s}{(s+0,1)(s+10)}$$

Esta é uma situação típica: o cancelamento de pólos lentos por zeros do controlador resulta em resposta à perturbação em que este pólo lento domina a resposta. Isso ocorre sempre que a perturbação aparece na entrada do processo, como no presente caso. Um ajuste mais adequado é obtido sem o cancelamento do pólo do processo. Fazendo $z = -2 \text{ s}^{-1}$ tem-se o lugar das raízes da Figura 5.14.

O ganho K pode então ser escolhido de forma que os pólos de malha fechada estejam no eixo real, bem à esquerda do pólo do processo, resultando em uma resposta mais rápida à perturbação. A alocação escolhida é aquela indicada pelo ponto assinalado na figura: $s = -2,5 \text{ s}^{-1}$. Para determinar o ganho para o qual os pólos são alocados nesta posição, usa-se a equação característica do sistema em

Capítulo 5 Alocação de pólos

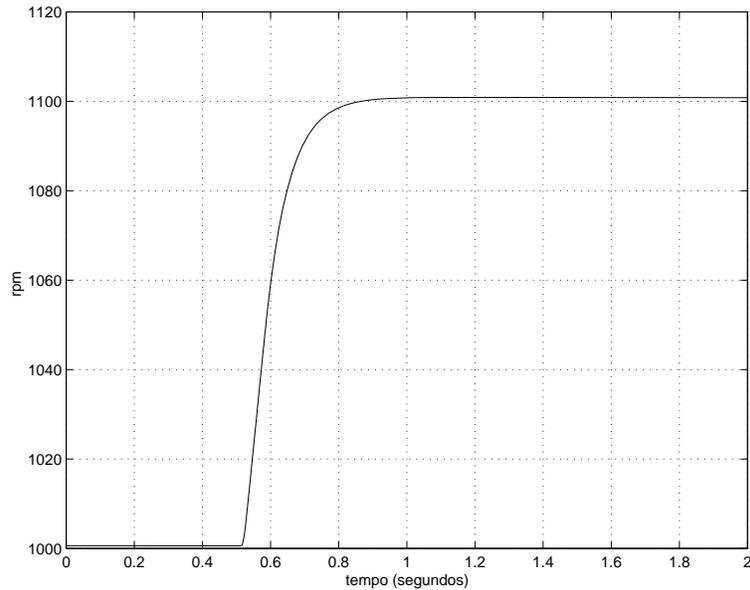


Figura 5.12 - Resposta à variação de referência para o controle de velocidade do motor CC por corrente de armadura

malha fechada:

$$1 + C(s)G(s) = 0 \Rightarrow s(s + 0,1) + 1,8K(s + 2) = \\ = s^2 + (0,1 + 1,8K)s + 3,6K = 0$$

Deseja-se saber para qual valor de K se tem $s = -2,5 \text{ s}^{-1}$ como raiz deste polinômio. Substitui-se $s = -2,5 \text{ s}^{-1}$ na equação característica, obtendo:

$$(-2,5)^2 + (0,1 + 1,8K)(-2,5) + 3,6K = 6 - 0,9K = 0 \rightarrow K = 6,67$$

A determinação do ganho K poderia igualmente ser feita a partir da aplicação da condição de módulo.

$$K = \left| \frac{s(s+1)}{1,8(s+2)} \right|_{s=-2,5} = \left| \frac{-2,5(-2,5+0,1)}{1,8(-2,5+2)} \right| = 6,67$$

O ganho pode ser mais facilmente determinado através de aplicativos disponíveis com interfaces gráficas para tanto (Borse (1997)). Na

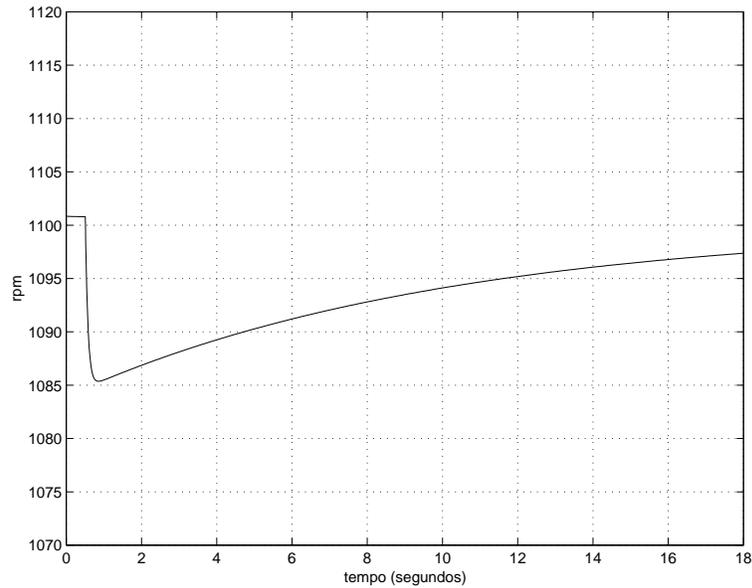


Figura 5.13 - Resposta à perturbação de carga para o controle de velocidade do motor CC por corrente de armadura

Figura 5.15 é apresentada a resposta ao salto de referência e de perturbação. Note que agora a resposta à perturbação é significativamente mais rápida.

O exemplo ilustra o fundamento do método do lugar das raízes para ajuste de parâmetros de um PID, mas também um conceito importante na escolha dos pólos e zeros de controladores em geral. O cancelamento dos pólos do processo por estes zeros simplifica o ajuste, conferindo um bom desempenho para mudanças de referência. Porém, se o(s) pólo(s) cancelado(s) for(em) muito lento(s), o desempenho obtido com relação à rejeição de perturbações pode ser insatisfatório.

Portanto, deve-se sempre obedecer os preceitos a seguir no que diz respeito a cancelamento de pólos do processo por zeros do controlador.

Capítulo 5 Alocação de pólos

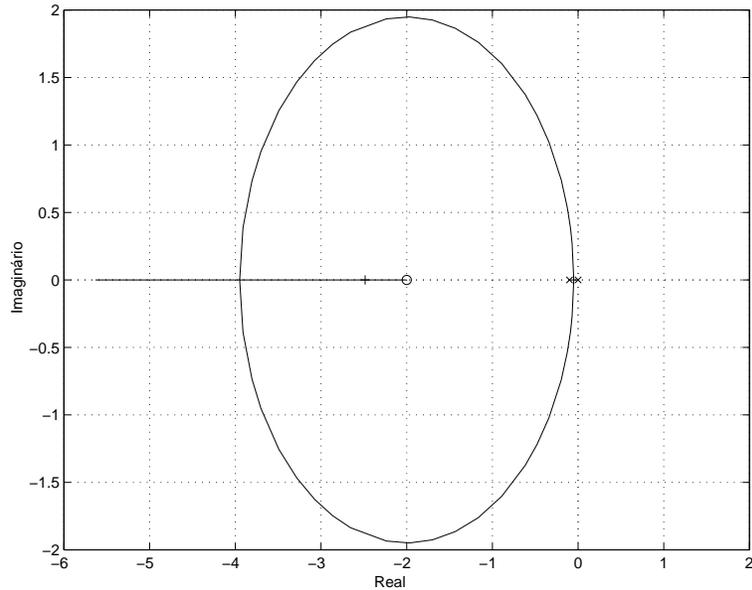


Figura 5.14 - Lugar das raízes para o controle de velocidade do motor CC por corrente de armadura

- 1) Pólos do processo significativamente mais lentos do que a resposta desejada para a resposta a perturbações do sistema em malha fechada somente devem ser cancelados por zeros do controlador quando não estiverem no caminho direto entre a perturbação e a saída do processo.
- 2) Pólos com parte real positiva ou muito próxima de zero *já* devem ser cancelados no projeto devido aos erros de precisão no cancelamento e outras questões que não serão aqui aprofundadas. Note também que, no caso em que o pólo cancelado está no semi-plano direito, o mesmo pode aparecer na função de transferência de alguma entrada de perturbação para a saída, levando a uma resposta divergente.

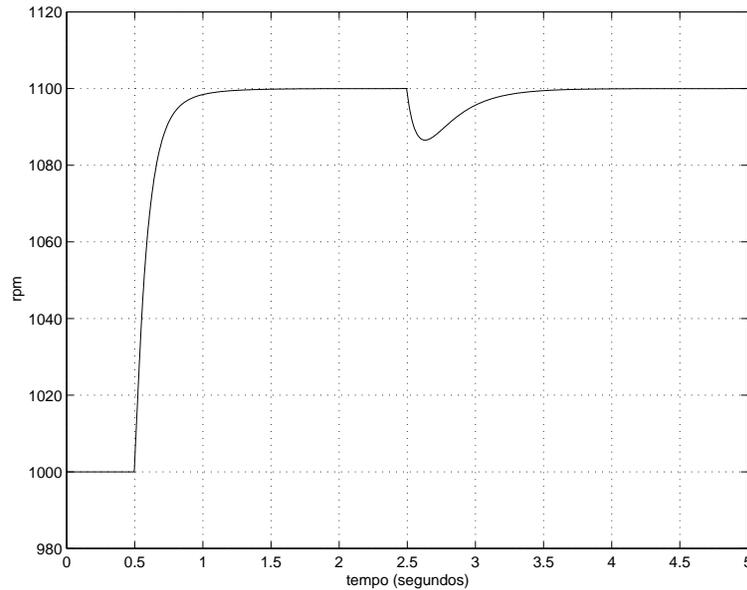


Figura 5.15 - Resposta à variação de referência e perturbação de carga para o controle de velocidade do motor CC por corrente de armadura

Exemplo 5.6 Considere o controle de posição por tensão de armadura de um motor CC, modelado como no Capítulo 4, e com a posição dada em graus. A função de transferência, com a conversão de unidades adequada, é dada por

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{\delta(s)}{E_a(s)} = \frac{\delta(s)}{\omega(s)} \frac{\omega(s)}{E_a(s)} = \\
 &= \frac{1}{s} \frac{1500}{s^2 + 50,1s + 275} \frac{\text{rpm}}{\text{V}} \frac{\frac{60}{s}}{\text{rpm}} = \\
 &= \frac{9000}{s(s + 6,275)(s + 43,83)} \frac{\circ}{\text{V}}
 \end{aligned}$$

O motor deve seguir referências do tipo salto com $t_s < 1$ s e $Mo \leq$

Capítulo 5 Alocação de pólos

10%. Como o processo é de tipo 1, não é necessário o uso de ação integral de controle para seguir com erro nulo referências constantes.

Considere que um PID comercial seja utilizado e o pólo limitador do ganho em altas freqüências da ação derivativa não seja conhecido. Assume-se então que esse pólo está a uma freqüência suficientemente alta e pode ser desprezado. A função de transferência do controlador fica reduzida a um zero e um ganho:

$$C(s) = K(1 + sT_d) = KT_d(s + \frac{1}{T_d}) = K'(s + z)$$

Note que com este controlador o sistema não rejeitará perturbações de carga.

Há dois parâmetros a serem ajustados: z e K' . O ajuste será feito fixando um desses parâmetros e escolhendo o outro pelo lugar das raízes. Para tanto, cancelamos o pólo mais lento do processo escolhendo o zero do controlador em $z = -6,275\text{s}^{-1}$ e traçamos o lugar das raízes para o ganho K' , apresentado na Figura 5.16.

O melhor desempenho transitório do sistema é obtido com os pólos de malha fechada próximos ao ponto de saída do eixo real, em $-21,91\text{ s}^{-1}$. Isso ocorre para $K' = 0,0534$. Os parâmetros do PD podem ser determinados como:

$$T_d = 1/z = 159,4\text{ ms}$$
$$K = K'/T_d = 0,3348 \frac{\text{V}}{\text{o}}$$

Na Figura 5.17 é apresentada a resposta do sistema quando submetido a uma variação de referência de 30° . Observa-se que o desempenho obtido satisfaz aos requisitos de desempenho.

Se o sistema deve rejeitar perturbação de carga, então é necessária a ação de controle integral. Sem a ação integral, um torque de carga constante acarretará um erro de seguimento da referência em regime permanente. Então a função de transferência do controlador deve ser a de um PID completo:

$$C(s) = K(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s}) = KT_d \frac{(s^2 + \frac{1}{T_d} s + \frac{1}{T_i T_d})}{s}$$
$$= K' \frac{(s + z_1)(s + z_2)}{s}$$

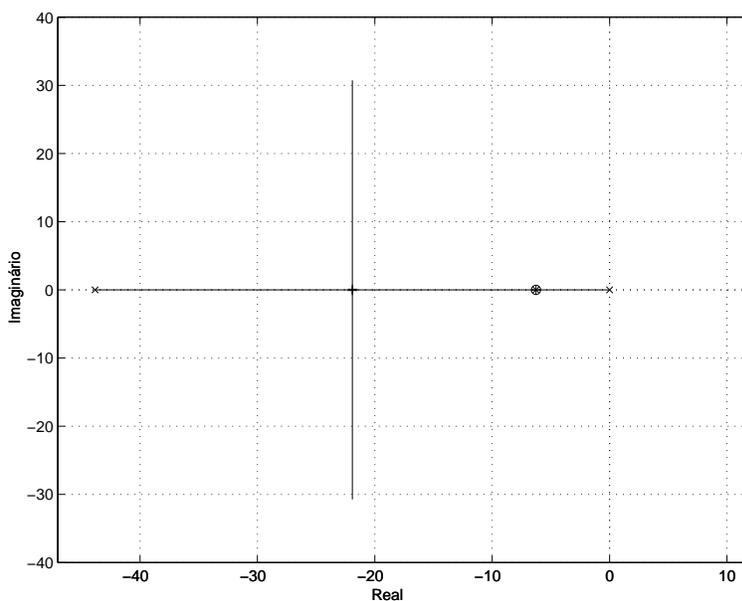


Figura 5.16 - Lugar das raízes para o controle de posição do motor CC com controle PD e cancelamento de pólo do processo

e tem-se três parâmetros a serem ajustados: K' , z_1 e z_2 . Escolhe-se inicialmente os zeros do controlador cancelando os pólos do processo: $z_1 = -6,275 \text{ s}^{-1}$ e $z_2 = -43,83 \text{ s}^{-1}$. Então, o lugar das raízes da equação característica para variações do ganho K' é aquele apresentado na Figura 5.18. Nesse caso, o centro das assíntotas é a origem e os pólos do sistema em malha fechada serão sempre imaginários puros. O sistema é então marginalmente estável para qualquer valor de ganho, apresentando oscilações sustentadas em sua saída.

Não é possível escolher o ganho de forma que o sistema tenha uma resposta transitória adequada, logo as posições escolhidas para os zeros não são adequadas. A fim de tornar o sistema estável, os zeros devem ser alocados em outras posições, de forma a trazer as assíntotas do lugar das raízes para a esquerda. Das regras de construção do lugar das raízes, vê-se que o centro das assíntotas desloca-se para a esquerda quando os zeros são colocados mais à direita. Assim, os zeros devem

Capítulo 5 Alocação de pólos

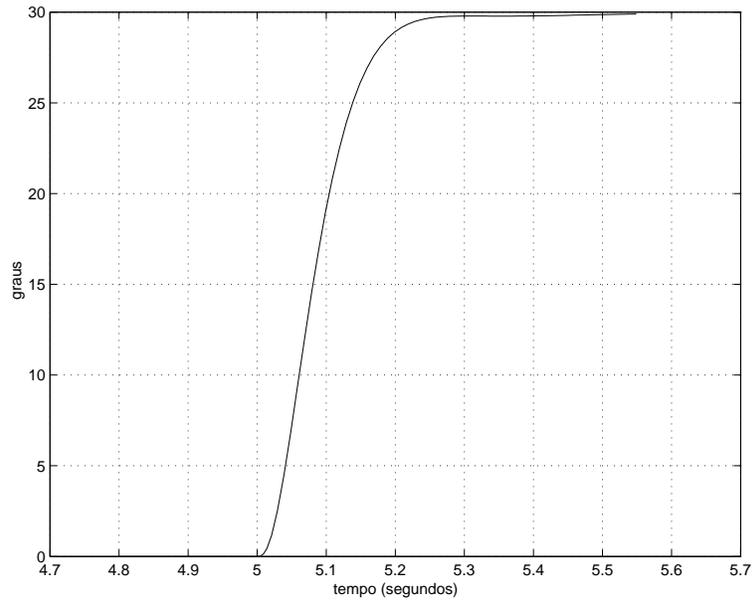


Figura 5.17 - Ângulo do motor CC em resposta a um salto de referência de 30° aplicado em $t = 5$ s

necessariamente ser escolhidos à direita dos pólos do processo para se obter um sistema estável em malha fechada. Quanto mais à direita os zeros estiverem, mais à esquerda estarão as assíntotas. Porém, zeros muito próximos ao eixo $j\omega$ atrairão os pólos que em malha aberta estão na origem, fazendo com que os mesmos nunca se afastem significativamente do eixo, o que resultaria em desempenho pobre. A posição ideal dos zeros pode ser determinada por tentativa e erro tendo em conta estas observações. Escolhendo os zeros nas posições $z_1 = -6,275$ e $z_2 = -1$ tem-se o lugar das raízes da Figura 5.19. A alocação de pólos dentro deste lugar das raízes que fornece o melhor desempenho é aquela em que os pólos estão mais à esquerda, que é também apresentada na figura.

O ganho que aloca os pólos nesta posição é calculado como $K' =$

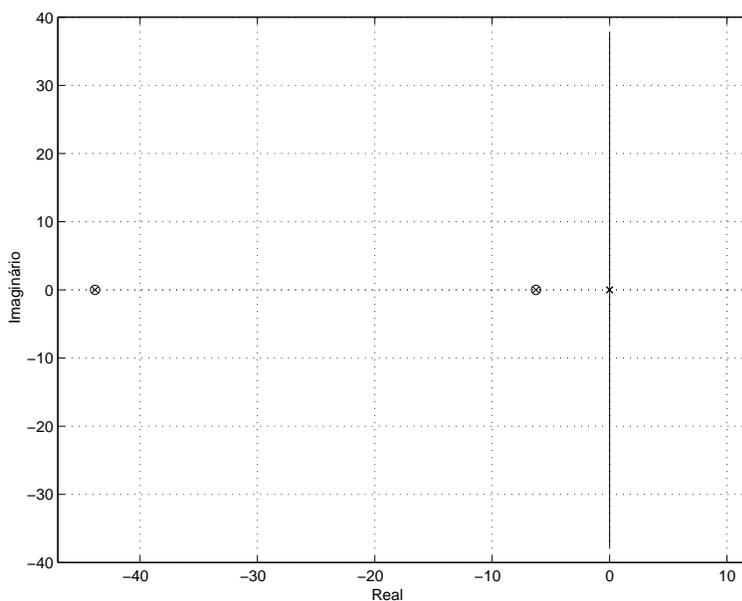


Figura 5.18 - Lugar das raízes do motor CC

1, 233 e os parâmetros do PID podem então ser determinados como:

$$K = 8,967 \frac{\text{V}}{\text{o}} \quad T_i = 1,159 \text{ s} \quad T_d = 0,1375 \text{ s}$$

Na Figura 5.20 é apresentada a resposta do sistema com esse controlador quando submetido a uma variação de referência seguida de uma perturbação.

A escolha da posição dos pólos e zeros do controlador deve ser feita de forma que o lugar das raízes tenha um formato que permita a posterior escolha do ganho alocando os pólos do sistema em posições adequadas ao atendimento das especificações. Determinar regras gerais de procedimento é bastante difícil, de forma que a escolha dos pólos e zeros do controlador requer certa familiaridade com o método e, muitas

Capítulo 5 Alocação de pólos

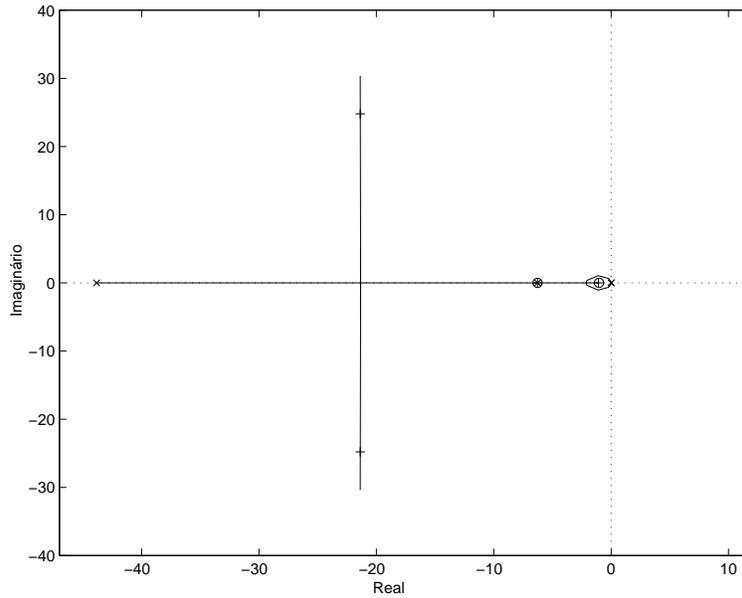


Figura 5.19 - Lugar das raízes para o controle de posição do motor CC

vezes, um procedimento de tentativa e erro. Ferramentas matemáticas computacionais facilitam bastante esta tarefa, traçando o lugar das raízes de maneira automática e contínua quando o usuário varia a posição dos pólos e zeros, ao mesmo tempo em que traça a resposta transitória correspondente. A determinação do ganho que aloca os pólos em uma determinada posição é também feita automaticamente, com o usuário indicando no gráfico a posição desejada para a alocação (Borse (1997)).

5.5 Exercícios

- 1) Considere um sistema de controle com as funções de transferência do controlador, processo e sensor dadas respectivamente por:

$$C(s) = \left(1 + \frac{K_d s}{s + 100}\right)$$

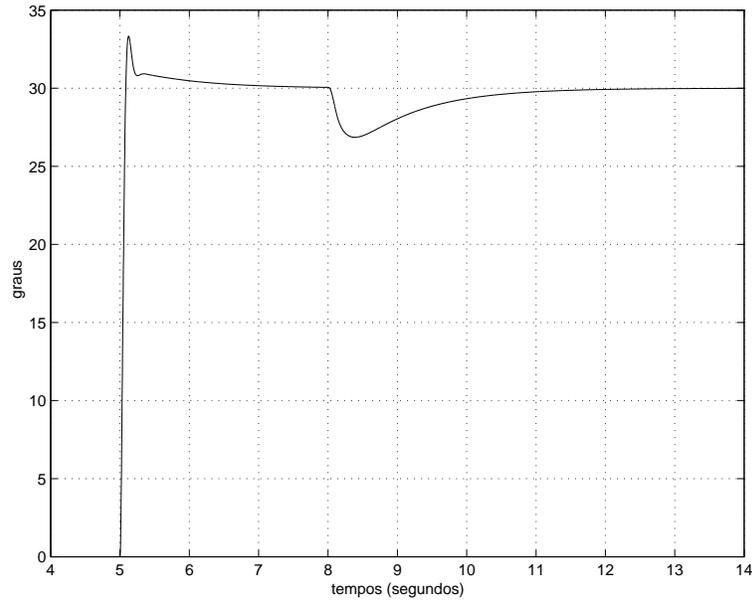


Figura 5.20 - Posição angular do motor CC em resposta a um salto de referência de 30° em $t = 5$ s e uma perturbação tipo salto em $t = 8$ s

$$G(s) = \frac{500}{s(s+50)(s+100)}$$

$$H(s) = 1$$

- Trace o lugar das raízes do denominador da função de transferência $T(s) = \frac{y(s)}{r(s)}$ para variações de K_d . Explícite o centro das assíntotas, os pontos de entrada e saída do eixo real, os ângulos de chegada/partida de pólos e zeros complexos e o ponto de cruzamento com o eixo real.
- O que acontece com a estabilidade do sistema em malha fechada se aumentarmos indefinidamente o ganho K_d ?
- Considerando duas situações: K_d próximo a zero e K_d muito elevado. Com base na posição dos pólos e zeros da $T(s)$, responda qualitativamente o que ocorrerá com a resposta ao salto do sistema nessas duas situações.

Capítulo 5 Alocação de pólos

- 2) Considere os processos descritos pelas seguintes funções de transferência:

$$\begin{aligned} G_1(s) &= \frac{5}{(s+2)(s+10)} & G_4(s) &= \frac{1}{s^2+2s+2} \\ G_2(s) &= \frac{1}{s(s+a)^2} & G_5(s) &= \frac{(s+5)}{(s-2)(s+10)} \\ G_3(s) &= \frac{s-5}{(s+2)(s+10)} & G_6(s) &= \frac{s+1}{(s+20)(s^2+25)} \end{aligned}$$

Estude o controle proporcional ($C(s) = k$) e o controle integral ($C(s) = k_i/s$) de cada um destes processos pelo método do lugar das raízes, utilizando as diretrizes a seguir.

- Para quais valores de k (k_i) o sistema em malha fechada é BIBO-estável?
 - Qual o valor do ganho crítico?
 - Para quais valores de k (k_i) a função de transferência de malha fechada possui todos os seus pólos reais?
 - Dentro dos possíveis ajustes dos pólos do sistema realimentado através do ganho k (k_i), identifique o ajuste que conduz ao menor tempo de acomodação possível na resposta ao degrau. Qual o valor do ganho k (k_i) que ajusta esta condição?
 - Existe possibilidade de ajuste de pólos para o sistema realimentado de tal forma que o máximo sobrepasso (máximo *overshoot*) é inferior a 20%? Determine a faixa de ganho aproximada que garante esta condição.
- 3) Considere o circuito elétrico da Figura 5.21.
- Determine o lugar dos pólos da função de transferência $T(s) = u(s)/e(s)$ para a variação do resistor R_6 de 0 a $+\infty$.
 - Considerando que o circuito é realimentado com ganho unitário, isto é, $e = r - u$, repita o item anterior para a função de transferência $T_1(s) = u(s)/r(s)$.

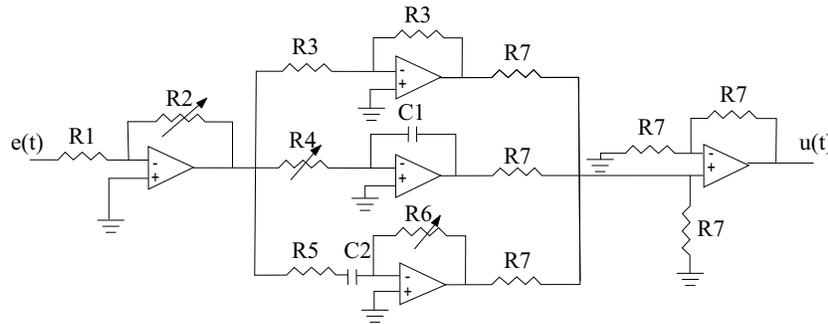


Figura 5.21 - Circuito elétrico com amplificadores operacionais ideais

- 4) Para cada um dos processos dados no exercício 2, projete um controlador de forma a satisfazer:
- seguimento de referências constantes com erro nulo em regime permanente;
 - rejeição assintótica de perturbações $q(t)$ do tipo constante;
 - $t_s < 1s$, $Mo \leq 10\%$.
- 5) Para cada um dos processos do exercício 2:
- a) Esboce como seria a resposta do processo ($y(t)$) se aplicássemos um salto de valor -2 em sua entrada $u(t)$.
 - b) Determine o parâmetros de um controlador PID de forma a satisfazer as seguintes especificações:
 - seguimento de referências constantes com erro nulo em regime permanente;
 - rejeição assintótica a perturbações constantes em regime permanente;
 - tempo de acomodação de aproximadamente $0,5$ s;
 - o sistema em malha fechada deve apresentar um par de pólos complexos dominante com coeficiente de amortecimento exatamente igual a $0,8$.

Capítulo 5 Alocação de pólos

- c) Considere o controlador projetado no item anterior e a seguinte situação: no instante $t = 0$ um salto unitário é aplicado na referência; 20 s após, o sistema sofre a ação de uma perturbação de carga constante e igual a $-0,2$. Quais serão os valores em regime permanente de cada uma das três ações de controle (proporcional, integral e derivativa)?
- 6) Considere um processo cuja função de transferência é dada por:

$$G(s) = \frac{h(s)}{v(s)} = \frac{K}{(s - a)}$$

onde $a > 0$ e $K > 0$.

- a) Esboce como seria a resposta do processo ($h(t)$) se aplicássemos um salto de valor -2 em sua entrada $v(t)$.
- b) Projete um controlador em função dos parâmetros a e K , *o mais simples possível*, a fim de que o sistema em malha fechada apresente:
- seguimento de referências constantes com erro nulo em regime permanente;
 - tempo de acomodação de aproximadamente 0,5 s;
 - $M_o = 0\%$.

Capítulo 6

Resposta em frequência

6.1 Fundamentos

6.1.1 Resposta em frequência

Sistemas lineares e invariantes no tempo (LIT) são usualmente representados por sua função de transferência. Uma interpretação muito importante e conveniente para a função de transferência de um sistema é obtida levando em conta o que acontece com a saída do sistema quando ele é excitado pela aplicação de um sinal senoidal em sua entrada. Se a entrada de um sistema LIT BIBO-estável for um sinal senoidal, o comportamento *em regime permanente* de sua saída será também um sinal senoidal, com a mesma frequência do sinal de entrada, porém com amplitude distinta e apresentando uma defasagem no tempo com relação a essa entrada, como representado na Figura 6.1. Essa amplitude ($A(\omega)$ na figura) e essa defasagem ($\Phi(\omega)$) dependem da frequência do sinal aplicado à entrada do sistema.

A amplitude e a fase da senóide na saída do sistema podem ser determinadas a partir da função de transferência. Calcula-se o valor de $G(s)$ para a frequência do sinal de entrada: $G(s)|_{s=j\omega}$, onde ω é a frequência angular do sinal de entrada. O resultado, denominado simplesmente $G(j\omega)$, será um número complexo, que representado em forma polar apresenta um módulo $|G(j\omega)|$ e um argumento $\angle G(j\omega)$. O módulo $|G(j\omega)|$ desse número complexo será o ganho que o sistema dá à amplitude do sinal, enquanto a defasagem será igual a $\angle G(j\omega)$.

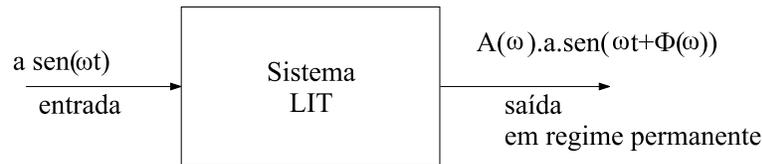


Figura 6.1 - Saída *em regime permanente* de um sistema LIT BIBO-estável excitado por uma senóide

Exemplo 6.1 Considere um sistema cuja função de transferência é:

$$G(s) = \frac{4}{s + 5} \quad (6.1)$$

Qual a resposta de regime permanente deste sistema a um cosseno com amplitude igual a 2 e frequência igual a 0,5 Hz? E se a frequência for alterada para 4 Hz?

A entrada do sistema é uma senóide: $x(t) = 2 \cos(\omega t)$, onde ω é a frequência angular do sinal. Vamos calcular primeiramente para o caso de frequência igual a 0,5 Hz. Nesse caso, a frequência angular é dada por $\omega = 2\pi \cdot 0,5 = \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Substituindo esse valor na função de transferência temos:

$$G(j\omega) = G(j\pi) = \frac{4}{j\pi + 5} = \frac{4}{5,90 \angle 32^\circ} = 0,677 \angle -32^\circ$$

Logo, a saída *em regime permanente* será dada por:

$$y(t) = 2 |G(j\pi)| \cos(\pi t + \angle G(j\pi)) = 1,3548 \cos(\pi t - 32^\circ)$$

Esse resultado é ilustrado na Figura 6.2, onde pode ser observado o comportamento transitório da saída, bem como seu comportamento em regime permanente, que é dado pela expressão anterior.

Se agora a frequência do sinal de entrada é alterada para 4 Hz, então tem-se:

$$G(j\omega) = G(j8\pi) = \frac{4}{5 + j8\pi} = 0,1561 \angle -78,7^\circ$$

Capítulo 6 Resposta em frequência

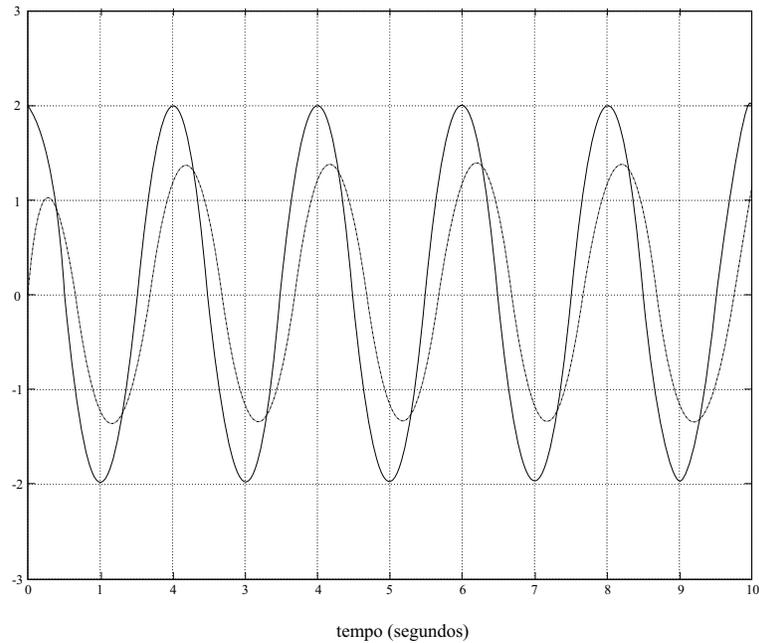


Figura 6.2 - Entrada (linha contínua) e saída (linha pontilhada) do sistema (6.1) a uma senoide com frequência de 0,5 Hz

e a saída em regime permanente é dada por

$$y(t) = 2 |G(j8\pi)| \cos(8\pi t + \angle G(j8\pi)) = 0,3122 \cos(8\pi t - 78,7^\circ)$$

O resultado é ilustrado na Figura 6.3.

Os valores de ganho $|G(j\omega)|$ e de defasagem $\angle G(j\omega)$ introduzidos pelo sistema no sinal senoidal são funções da frequência do sinal de entrada. A essas funções $|G(j\omega)|$ e $\angle G(j\omega)$, definidas no intervalo $0 \leq \omega < \infty$, dá-se o nome de resposta em frequência do sistema. A representação gráfica dessas funções é ferramenta poderosa de análise e síntese de sistemas de controle, e será utilizada nas seções seguintes com esta finalidade.

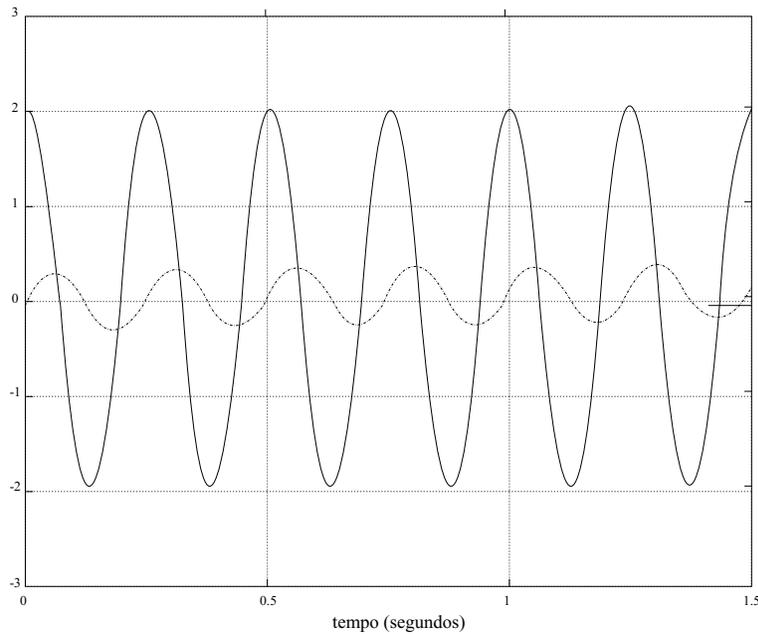


Figura 6.3 - Entrada (linha contínua) e saída (linha pontilhada) do sistema (6.1) a uma senoide com frequência de 4 Hz

Por conveniência, a representação gráfica da resposta em frequência é usualmente feita com o eixo das abscissas em escala logarítmica, e o módulo $|G(j\omega)|$ expresso em unidades de decibéis. O valor de uma grandeza em decibéis é dado por $|G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} |G(j\omega)|$. O gráfico resultante é denominado *diagrama de Bode* do sistema. O diagrama de Bode para o sistema do exemplo 6.1 é dado na Figura 6.4.

Portanto, a função de transferência representa o ganho do sistema, sendo este ganho variável de acordo com a frequência do sinal de entrada. A resposta em frequência caracteriza o comportamento do sistema e esta caracterização pode ser rapidamente visualizada em um diagrama de Bode. Conhecidas as respostas em frequência de cada um dos componentes de um sistema de controle (processo, controlador, sensor e atuador), é possível determinar diretamente as características

Capítulo 6 Resposta em frequência

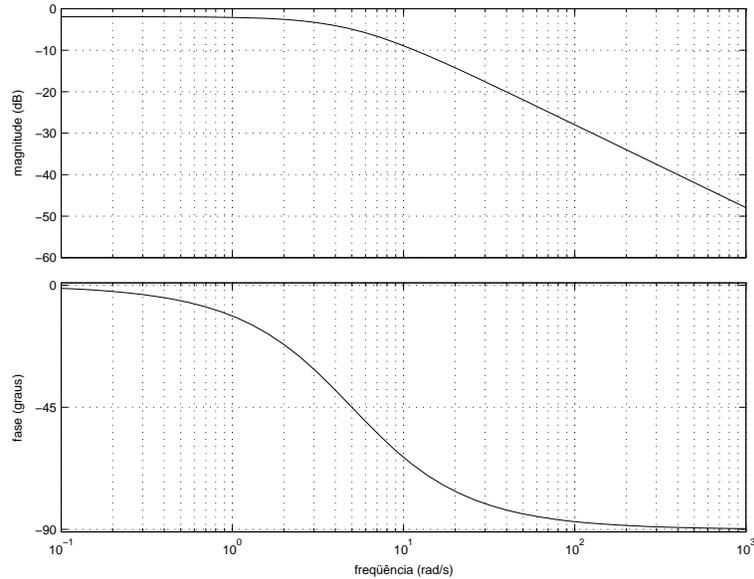


Figura 6.4 - Diagrama de resposta em frequência (Bode) para o sistema $G(s) = \frac{4}{s+5}$; a frequência é expressa em radianos por segundo e apresentada em escala logarítmica; o módulo da resposta em frequência é apresentado em decibéis

de estabilidade e robustez do sistema em malha fechada, bem como inferir sobre seu desempenho transitório.

6.1.2 Análise de estabilidade

Considere um sistema de controle como na Figura 6.5, onde nenhuma das três funções de transferência $C(s)$, $G(s)$ e $H(s)$ têm pólos com parte real positiva. Seja $C(s) = K\bar{C}(s)$, onde $\bar{C}(s)$ é uma função de transferência dada e deseja-se analisar a estabilidade do sistema realimentado para diferentes valores de K . Assuma ainda, sem perda de generalidade, que o ganho estático do processo é positivo ($G(0) > 0$) e que o sensor tem ganho unitário ($H(0) = 1$).

Esse sistema é estável se todos os pólos da função de transferência

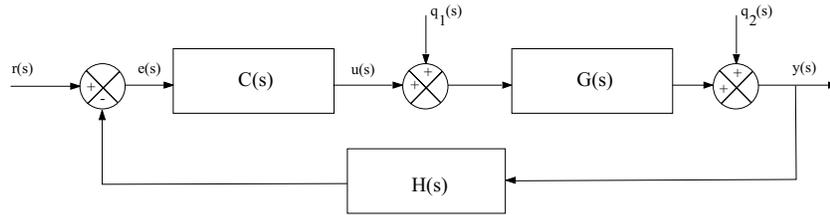


Figura 6.5 - Sistema de controle

em laço fechado $T(s) = \frac{K\bar{C}(s)G(s)}{1+K\bar{C}(s)G(s)H(s)}$ têm parte real negativa. Os pólos dessa função de transferência são as raízes da equação:

$$1 + K\bar{C}(s)G(s)H(s) = 0 \quad (6.2)$$

chamada *equação característica* do sistema realimentado.

Para $K = 0$ o sistema realimentado é estável, pois esta situação corresponde à inexistência de realimentação e os três sistemas componentes (processo, sensor e controlador) são, por hipótese, estáveis. À medida que o ganho K é aumentado, pode haver (e em geral há) um valor de K a partir do qual o sistema realimentado se torna instável. Este valor de K chama-se ganho crítico do sistema e é anotado por K_u , conforme discutido nos Capítulos 3 e 5.

Se o ganho K é fixado com valor igual ao ganho crítico, $K = K_u$, então o sistema encontra-se no limite da estabilidade: para valores de ganho inferiores ao ganho crítico, as raízes da equação característica somente têm raízes com parte real negativa e para valores superiores ao ganho crítico, há raízes com parte real positiva. Ou seja, se o ganho K for aumentado gradativamente a partir de $K = 0$, então o ganho crítico é o valor de K para o qual uma ou mais raízes da equação característica (6.2) deixa(m) de ter valor(es) negativo(s) e passa(m) a ter valor(es) positivo(s). Portanto, nessa situação, com $K = K_u$, esta raiz (ou raízes) da equação característica tem parte real nula. Pode-se dizer então que existe uma frequência ω que satisfaz a equação característica:

$$1 + K_u\bar{C}(j\omega)G(j\omega)H(j\omega) = 0$$

Como nessa equação aparecem apenas os valores das funções de

Capítulo 6 Resposta em frequência

transferência para $s = j\omega$, é possível estudá-la a partir da resposta em frequência de cada um dos sistemas componentes do sistema realimentado. Como $\bar{C}(j\omega)G(j\omega)H(j\omega)$ é, em geral, um número complexo, é conveniente desdobrar esta equação, escrevendo cada um dos lados da equação como um número complexo na forma polar. Obtém-se assim as duas equações seguintes:

$$K_u |\bar{C}(j\omega)G(j\omega)H(j\omega)| = 1 \quad (6.3)$$

$$\angle \bar{C}(j\omega)G(j\omega)H(j\omega) = \pm\pi \quad (6.4)$$

Ou seja, o ganho crítico K_u é aquele valor de ganho para o qual existe uma frequência ω que satisfaz simultaneamente às equações (6.3) e (6.4). Assim sendo, é possível determinar o ganho crítico do sistema a partir dessas equações.

Exemplo 6.2 Considere um sistema de controle com:

$$G(s) = \frac{30}{s^3 + 11s^2 + 53s + 70}$$

$$C(s) = K \frac{s+1}{s}$$

$$H(s) = 1$$

As equações (6.3) e (6.4) para este caso são dadas por:

$$\begin{aligned} |\bar{C}(j\omega)G(j\omega)H(j\omega)| &= \frac{30 |j\omega + 1|}{|70 - 11\omega^2 + j(53\omega - \omega^3)| \omega} \\ &= \frac{1}{K_u} \end{aligned} \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} \angle \bar{C}(j\omega)G(j\omega)H(j\omega) &= \arctan \frac{\omega}{1} - 90^\circ - \arctan \frac{53\omega - \omega^3}{|70 - \omega^2|} \\ &= -180^\circ \end{aligned} \quad (6.6)$$

O ganho crítico é o valor de ganho para o qual essas duas equações são satisfeitas simultaneamente para uma mesma frequência. Assim,

determinar o ganho crítico consiste em resolver essas equações. A fim de encontrar estas soluções, inicialmente analisamos o diagrama de Bode da função $\bar{C}(s)G(s)H(s)$, que é apresentado na Figura 6.6.

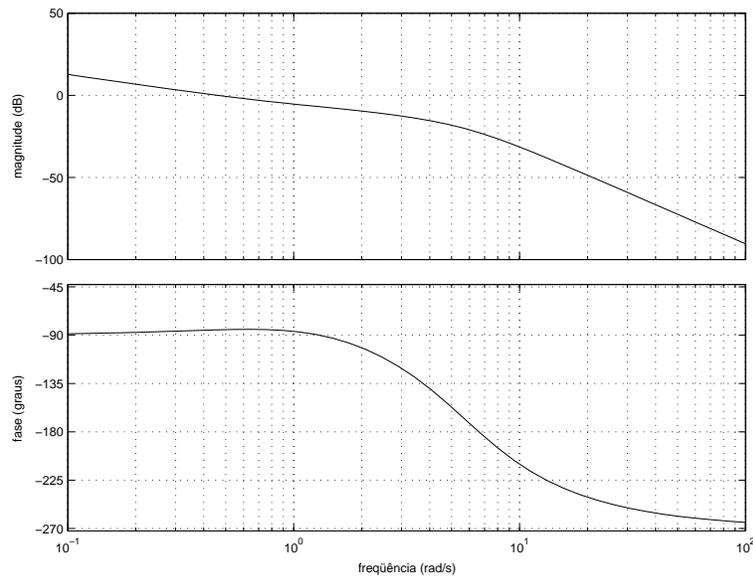


Figura 6.6 - Diagrama de resposta em frequência (Bode) para o sistema do exemplo 6.2

Note que o diagrama é traçado usando a função $\bar{C}(s)G(s)H(s)$, portanto não levando em conta o ganho K . Por outro lado, uma vez que a fase do sistema não depende do ganho, as soluções da equação (6.6) podem ser encontradas independentemente do valor do ganho. Verifica-se pela inspeção do gráfico que existe uma frequência, e apenas uma, na qual a fase da função de laço atinge o valor de -180° , e que esta frequência está entre 6 e 7 $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Para determinar mais precisamente o valor dessa frequência, podemos resolver numericamente a equação (6.6), obtendo como solução o valor $\omega_\pi = 6,603 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. O ganho crítico será o valor do ganho K no qual o módulo da função de laço $K\bar{C}(s)G(s)H(s)$, calculado nesta

Capítulo 6 Resposta em frequência

mesma frequência, for igual a 1. Assim, substituindo ω_π na equação (6.5), obtém-se $\bar{C}(j\omega_\pi)G(j\omega_\pi)H(j\omega_\pi) = 0,0732 = \frac{1}{K_u}$ e, portanto, $K_u = \frac{1}{0,0732} = 13,65$ é o ganho crítico do sistema de controle.

A função de transferência em laço fechado com este valor de ganho é dada por:

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{K_u \bar{C}(s)G(s)}{1 + K_u \bar{C}(s)G(s)H(s)} \\ &= 410 \frac{s + 1}{s^4 + 11s^3 + 53s^2 + 480s + 410} \end{aligned}$$

cujos pólos são:

$$\begin{aligned} &-10,07 \\ &-0,9332 \\ &\pm j6,603 \end{aligned}$$

ou seja, um par de pólos com parte real nula e parte imaginária igual à frequência ω_π .

No exemplo, a existência de pólos com parte real nula na função de transferência em laço fechado foi analisada resolvendo inicialmente a equação (6.4), determinando assim para qual frequência a fase da função de laço era igual a π . Em seguida, foi verificada a condição de módulo: se o módulo da função de laço for igual à unidade nesta mesma frequência, então o sistema está no limite da estabilidade e o ganho escolhido para o sistema é exatamente igual ao ganho crítico. Daí infere-se que, se o módulo da resposta em frequência nesta mesma frequência for menor do que 1, então o ganho escolhido é menor do que o ganho crítico e, portanto, o sistema realimentado é estável. De maneira similar, se o módulo for maior do que 1, o sistema realimentado é instável. O resultado deste raciocínio, que constitui o fundamento de toda a análise e projeto de sistemas de controle no domínio da frequência, é resumido a seguir.

Teorema - considere um sistema de controle como na Figura 6.5, que nenhuma das funções de transferência no sistema tem pólos com

parte real positiva e que os ganhos estáticos de cada elemento do sistema são positivos, isto é, $C(0) > 0$, $G(0) > 0$ e $H(0) > 0$. Sejam as frequências ω_0 e ω_π definidas como aquelas que satisfazem cada uma das equações a seguir:

$$\begin{aligned} K|\bar{C}(j\omega_0)G(j\omega_0)H(j\omega_0)| &= 1 \\ \angle\bar{C}(j\omega_\pi)G(j\omega_\pi)H(j\omega_\pi) &= -\pi \end{aligned}$$

Se:

$$-\pi < \angle K\bar{C}(j\omega_0)G(j\omega_0)H(j\omega_0) < \pi$$

e

$$|K\bar{C}(j\omega_\pi)G(j\omega_\pi)H(j\omega_\pi)| < 1$$

então o sistema de controle é estável.

6.2 Especificações no domínio da frequência

As funções de transferência $C(s)$, $G(s)$ e $H(s)$ são modelos para os sistemas constituintes do sistema de controle e como tais representam aproximações de seu comportamento. O comportamento de um sistema real jamais será exatamente igual àquele previsto pelo modelo. Assim, se um sistema de controle é projetado, com base nos modelos do processo, do controlador e do sensor, para operar exatamente no limite da estabilidade ou muito próximo a este limite, as diferenças entre os modelos matemáticos e o comportamento real dos sistemas podem acarretar um comportamento instável do sistema de controle real. Por essa razão é fundamental projetar o sistema de controle tendo em mente não apenas que o mesmo seja estável, mas sim que ele esteja suficientemente distante da condição limite de instabilidade, com margens de segurança que visem assegurar a estabilidade do sistema de controle real. Essas margens de segurança são chamadas de *margens de estabilidade*.

A “distância” da condição limite de estabilidade pode ser quantificada na resposta em frequência de duas formas. Se o valor do módulo da resposta em frequência, na frequência ω_π , for inferior a 1, então o sistema é estável. Se esse valor for próximo a 1, o sistema está próximo do limite de estabilidade. Por outro lado, se esse valor for muito menor

Capítulo 6 Resposta em frequência

do que um, o sistema está longe deste limite, e pode-se ter mais confiança de que o sistema real efetivamente terá comportamento estável. Assim, a relação entre o valor limite ($|C(j\omega_\pi)G(j\omega_\pi)H(j\omega_\pi)| = 1$) e o valor do módulo na frequência ω_π é uma medida de distância à instabilidade e, portanto, da robustez do sistema. Essa medida corresponde a uma margem de segurança deixada no projeto do sistema, e é chamada margem de ganho.

Outra medida de robustez (“distância à instabilidade”) pode ser obtida em função da fase da resposta em frequência. Tomando a frequência em que o módulo da resposta em frequência é igual a um (ω_0), o sistema estará no limite da estabilidade se a fase for igual a -180° nesta mesma frequência. Se, nessa frequência, a fase for menos negativa do que -180° , então o sistema será estável. Esta diferença entre o valor da fase e seu valor limite para instabilidade é chamada margem de fase.

As margens de estabilidade são definidas formalmente a seguir.

Definição - margens de estabilidade: margem de ganho (MG) e margem de fase (MF). Sejam ω_0 a frequência de cruzamento de ganho, isto é, a frequência na qual $|K\bar{C}(j\omega_0)G(j\omega_0)H(j\omega_0)| = 1$, e ω_π a frequência de 180° , ou seja, a frequência para a qual $\angle C(j\omega_\pi)G(j\omega_\pi)H(j\omega_\pi) = -180^\circ$. A margem de ganho é o máximo fator multiplicativo pelo qual o ganho K ainda poderia ser aumentado sem que o sistema realimentado perdesse a estabilidade. Então, a margem de ganho (MG) é dada por:

$$MG = \frac{1}{K\bar{C}(j\omega_\pi)G(j\omega_\pi)H(j\omega_\pi)}$$

A margem de fase é o máximo valor que poderia ser subtraído da fase da função de laço sem que o sistema realimentado perdesse a estabilidade. Assim sendo, a margem de fase (MF) é dada por:

$$MF = 180^\circ + \angle K\bar{C}(j\omega_0)G(j\omega_0)H(j\omega_0)$$

Exemplo 6.3 Considere novamente o sistema de controle do exemplo 6.2. O ganho K do controlador é escolhido como $K = 4$. Determine as margens de estabilidade para esse sistema de controle.

A função de laço do sistema de controle é dada por $C(s)G(s)H(s) = K \frac{30(s+1)}{s(s^3+11s^2+53s+70)}$. Se $K = 4$, o diagrama de Bode dessa função será o mesmo apresentado na Figura 6.6, com a única exceção de que a escala de ganho será alterada, conforme apresentado na Figura 6.7.

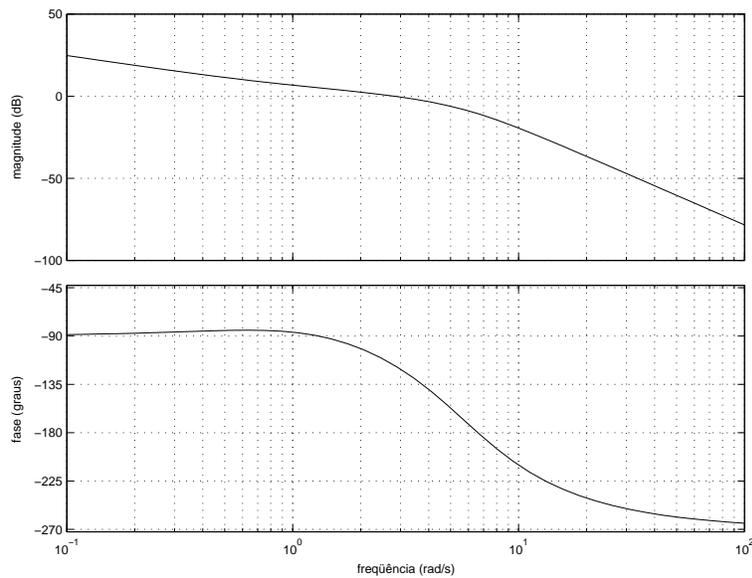


Figura 6.7 - Diagrama de resposta em frequência (Bode) para o sistema do exemplo 6.2 com $K = 4$

Vê-se nessa figura que a frequência na qual a fase é igual a -180° está entre 6 e $7 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ (como anteriormente) e que nesta mesma frequência o módulo da função de transferência é inferior a 0 dB. Por outro lado, a frequência na qual o módulo é igual a 1 (0 dB) é ligeiramente inferior a $3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, e nesta mesma frequência a fase é menos negativa do que -180° . Logo, ambos os critérios do teorema são satisfeitos e, portanto, o sistema de controle é estável. Não é necessário efetuar nenhum cálculo para determinar a estabilidade do sistema; esta análise foi feita de forma puramente gráfica.

Dado que o sistema de controle é estável, podemos determinar suas

Capítulo 6 Resposta em frequência

margens de estabilidade; vamos iniciar calculando a margem de fase. Para tanto, determinamos a frequência de cruzamento de ganho ω_0 :

$$K | \bar{C}(j\omega_0)G(j\omega_0)H(j\omega_0) | = 4 \left| \frac{30(j\omega_0 + 1)}{j\omega_0(70 - 11\omega_0^2 + j(53\omega_0 - \omega_0^3))} \right| = 1 \quad (6.7)$$

Solucionando numericamente a equação (6.7) obtém-se $\omega_0 = 2,80 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. A fase da função de laço nesta frequência é determinada como:

$$\begin{aligned} \angle C(j\omega_0)G(j\omega_0)H(j\omega_0) &= \arctan \omega_0 - 90^\circ - \arctan \frac{53\omega_0 - \omega_0^3}{70 - 11\omega_0^2} \\ &= -117^\circ \end{aligned}$$

Portanto, a margem de fase é igual a:

$$MF = 180^\circ + \angle C(j\omega_0)G(j\omega_0)H(j\omega_0) = 63^\circ$$

Para determinar a margem de ganho, inicialmente se deve calcular a frequência de -180° , o que já foi feito no exemplo 6.2, sendo obtido o valor $\omega_\pi = 6,603 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. O módulo da função de laço nessa mesma frequência é dado por:

$$\begin{aligned} K | \bar{C}(j\omega_\pi)G(j\omega_\pi)H(j\omega_\pi) | &= 4 \left| \frac{30(j\omega_\pi + 1)}{j\omega_\pi(70 - 11\omega_\pi^2 + j(53\omega_\pi - \omega_\pi^3))} \right| \\ &= \frac{120\sqrt{\omega_\pi^2 + 1^2}}{\omega_\pi(\sqrt{(70 - 11\omega_\pi^2)^2 + (53\omega_\pi - \omega_\pi^3)^2})} \\ &= 0,2930 \end{aligned}$$

Logo, a margem de ganho é igual a:

$$MG = \frac{1}{K | \bar{C}(j\omega_\pi)G(j\omega_\pi)H(j\omega_\pi) |} = 3,413$$

Essa margem também pode ser expressa em decibéis:

$$MG_{\text{dB}} = 20 \log MG = 20 \log 3,413 = 10,66 \text{ dB}$$

Note que a margem de ganho poderia também ter sido determinada diretamente do valor do ganho crítico calculado no exemplo 6.2 como $MG = \frac{K_u}{K} = \frac{13,65}{4}$.

6.3 Projeto de controladores em avanço e em atraso

Conforme visto na análise anterior, a resposta em frequência da função de laço $C(s)G(s)H(s)$ determina o desempenho do sistema de controle. Essa resposta em frequência é dada pelo produto das respostas em frequência de cada um de seus componentes: o processo ($G(s)$), o sensor ($H(s)$) e o controlador ($C(s)$). As duas primeiras funções ($G(s)$ e $H(s)$) são dados do problema e o projeto consiste em ajustar, pela escolha adequada da função de transferência do controlador $C(s)$, o diagrama de resposta em frequência da função de laço para atender às especificações de margens de estabilidade e desempenho em regime permanente.

Para realizar o projeto é importante poder analisar separadamente o efeito de cada um destes três componentes da função de laço sobre a resposta em frequência. Isso é largamente facilitado pela utilização de diagramas em escala logarítmica (diagramas de Bode), devido à propriedade de adição dos logaritmos: $\log(a.b) = \log(a) + \log(b)$. Fazendo uso dessa propriedade, tem-se:

$$\begin{aligned} 20 \log | C(j\omega)G(j\omega)H(j\omega) | &= 20 \log | C(j\omega) | + 20 \log | G(j\omega) | \\ &\quad + 20 \log | H(j\omega) | \\ \angle C(j\omega)G(j\omega)H(j\omega) &= \angle C(j\omega) + \angle G(j\omega) + \angle H(j\omega) \end{aligned}$$

Então pode-se analisar cada um dos diagramas de resposta em frequência em separado e em seguida somá-los. Dessa forma, o projeto pode ser iniciado a partir da análise da resposta em frequência do processo e sensor somente, e verificando se seu formato é adequado às especificações. Caso não o seja, se verifica como deve ser alterado esse formato para que seja atingido este objetivo, e escolhe-se a função de transferência do controlador que realiza esta alteração. Esta análise não seria possível sem fazer uso da propriedade de soma dos logaritmos.

Funções de transferência simples e padronizadas são quase invariavelmente escolhidas para a implementação dos controladores. Esta idéia de controladores padronizados não é nova, haja vista que a maior parte dos controladores projetados ao longo deste livro utilizam uma função de transferência padrão, que é o controlador PID. Essas funções

Capítulo 6 Resposta em frequência

de transferência padronizadas podem ser do tipo PI, PD, PID, ou blocos de avanço ou atraso, que serão definidos em seguida. O projeto de um controlador é realizado escolhendo os parâmetros destas funções padronizadas. Quando necessário, dois ou mais blocos em série são utilizados. Em algumas ocasiões, esses blocos padrão não são suficientes para obter o desempenho desejado, porém mesmo nessas ocasiões os conceitos utilizados para o projeto serão os mesmos aqui apresentados.

6.3.1 Controladores em atraso

A função de transferência de um controlador em atraso é dada por:

$$C(s) = K \frac{1 + sT}{1 + s\alpha T} \quad (6.8)$$

com $\alpha > 1$. Por construção, a fase dessa função de transferência é sempre negativa, portanto este sistema insere um atraso de fase em qualquer sinal senoidal que seja aplicado à sua entrada, derivando daí o nome de controlador *em atraso*. Com efeito:

$$\angle C(j\omega) = \arctan \omega T - \arctan \alpha \omega T$$

e uma vez que $\alpha < 1$, o segundo termo dessa subtração é sempre maior do que o primeiro. Além disso:

$$\angle C(0) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \angle C(j\omega) = 0$$

A resposta em frequência típica de um controlador em atraso é apresentada na Figura 6.8.

O projeto de um controlador em atraso consiste em determinar os três parâmetros K , T e α , de forma a atender as especificações de desempenho. As especificações dadas são desempenho em regime permanente e margens de estabilidade. O desempenho de regime permanente depende apenas do ganho K . Se e_{RP} é o erro de regime permanente a uma referência do tipo salto, então:

$$e_{RP} = \frac{1}{1 + C(0)G(0)H(0)} = \frac{1}{1 + KG(0)H(0)}$$

uma vez que $C(0) = K$. Assim sendo, é possível determinar diretamente o ganho K do controlador a partir do erro de regime permanente especificado:

$$K = \frac{1 - e_{RP}}{e_{RP}G(0)H(0)}$$

Os outros parâmetros do controlador devem ser escolhidos a partir de seu efeito sobre as margens de estabilidade.

O efeito benéfico de um controlador em atraso para a estabilidade está na redução de ganho obtida em frequências altas. Essa redução de ganho é observada na Figura 6.8 e pode ser verificada analiticamente. O módulo da resposta em frequência do controlador é dado por:

$$|C(j\omega)| = K \frac{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}{\sqrt{1 + (\alpha\omega T)^2}}$$

que é sempre menor do que K e diminui com o aumento da frequência. Com esta redução de ganho pode-se fazer com que a frequência de cruzamento de ganho ω_0 seja reduzida, e/ou que o módulo na frequência ω_π seja reduzido. Se os parâmetros do controlador forem escolhidos de forma que estes efeitos se dêem nas faixas de frequências adequadas, então isso acarretará em aumento das margens de estabilidade.

Por outro lado, o atraso de fase inserido pelo controlador tende a piorar a estabilidade do sistema. Se o controlador causar um atraso adicional na função de laço na frequência de cruzamento de ganho, então a margem de fase será reduzida, podendo mesmo levar o sistema à instabilidade. Por essa razão os parâmetros do controlador devem ser escolhidos de tal forma que este atraso se dê apenas para frequências muito abaixo da frequência de cruzamento de ganho. Assim, o atraso inserido pelo controlador será irrelevante para a estabilidade do sistema. Isso é obtido fazendo com que as singularidades do controlador (o pólo e o zero) sejam muito menores do que a frequência de cruzamento de ganho da função $KG(j\omega)H(j\omega)$, ou seja,

$$\frac{1}{T}, \frac{1}{\alpha T} \ll \omega_0$$

Se o pólo e o zero são escolhidos dessa forma, é possível fazer a seguinte aproximação para o módulo da resposta em frequência quando

Capítulo 6 Resposta em frequência

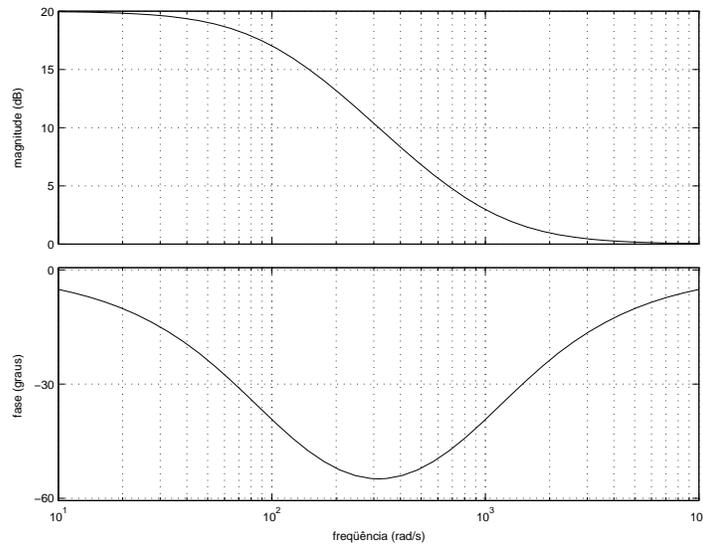


Figura 6.8 - Resposta em frequência de um controlador em atraso com $K = 10$, $T = 1$ ms, $\alpha = 10$

calculada para frequências próximas à frequência de cruzamento de ganho:

$$|C(j\omega_0)| = K \frac{\sqrt{1 + (\omega_0 T)^2}}{\sqrt{1 + (\alpha \omega_0 T)^2}} \approx K \frac{1}{\alpha} \quad (6.9)$$

pois $T\omega_0$, $\alpha T\omega_0 \gg 1$. Essa expressão permite escolher o parâmetro α do controlador e por essa razão é a principal equação no projeto de um controlador em atraso, conforme ilustrado no exemplo a seguir.

Exemplo 6.4 Considere um motor CC controlado por corrente, com sensor tacométrico. As funções de transferência do motor e do sensor são dadas respectivamente por:

$$G(s) = \frac{5}{0,2s + 1} \frac{\text{rpm}}{\text{V}}$$

$$H(s) = \frac{0,01}{0,04 s + 1} \frac{\text{V}}{\text{rpm}}$$

Deseja-se obter um erro de regime permanente inferior a 5% e as seguintes margens de estabilidade: $MG > 2$, $MF > 40^\circ$. Tem-se:

$$e_{RP} = \frac{1}{1 + G(0)H(0) K} = \frac{1}{1 + 0,05 K} \leq 0,05$$

e, portanto,

$$K \geq \frac{1 - 0,05}{0,05 \times 0,05} = 380$$

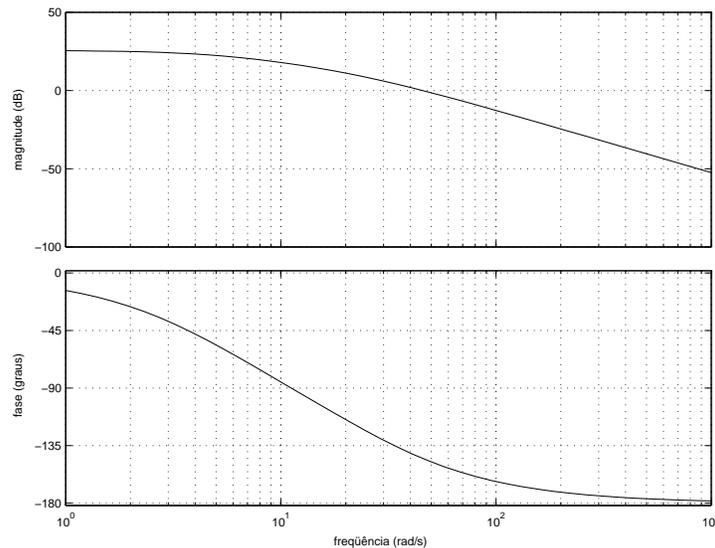


Figura 6.9 - Resposta em frequência da função $\tilde{L}(s)$ para o motor CC com controle proporcional com $K = 380$

Fazendo $K = 380$, a resposta em frequência da função $\tilde{L}(s) = KG(s)H(s)$ é aquela apresentada na Figura 6.9. Pode ser observado

Capítulo 6 Resposta em frequência

nessa figura que a frequência de cruzamento de ganho é aproximadamente igual a $\omega_0 \approx 45 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ e que nesta frequência a fase é de aproximadamente $\tilde{L}(j\omega_0) \approx -145^\circ$. Assim sendo, a margem de fase é de aproximadamente $MF = 180^\circ + \tilde{L}(j\omega_0) \approx 45^\circ$, o que é satisfatório. Para determinar a margem de ganho, procura-se a frequência na qual a fase da função $L(j\omega)$ alcança -180° . Observa-se no gráfico que a fase nunca realmente alcança este valor, mas tende a ele quando a frequência tende ao infinito, isto é, $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \arg \tilde{L}(j\omega) = -180^\circ$. Como o módulo da função de laço no infinito é zero, tem-se que a margem de ganho é igual a $MG = \frac{1}{\lim_{\omega \rightarrow \infty} |\tilde{L}(j\omega)|} = \infty$.

Assim sendo, todas as especificações são satisfeitas apenas com o ganho K como controlador: o erro de regime permanente é igual a 5%, a margem de ganho é infinita e a margem de fase é igual a 45° , maior do que os 40° especificados. O controlador puramente proporcional é suficiente para atender às especificações e o projeto está completo.

Agora imagine que as especificações são alteradas, exigindo-se um melhor desempenho de regime permanente: $e_{RP} \leq 2\%$. Nesse caso, o ganho do controlador deve satisfazer:

$$K \geq \frac{1 - e_{RP}}{e_{RP}G(0)H(0)} = \frac{0,98}{0,02 \times 0,05} = 980$$

A resposta em frequência da função $\tilde{L}(s)$ com este ganho é apresentada na Figura 6.10, onde pode ser observado que a margem de ganho continua sendo infinita,¹⁰ porém a margem de fase é aproximadamente igual a $MF \approx 22^\circ$, portanto não satisfazendo à especificação.

O controlador proporcional não é capaz de satisfazer a estas novas especificações. Para aumentar a margem de fase, vamos utilizar um controlador em atraso. Lembre que o benefício obtido de um controlador em atraso é a redução de módulo, através da qual se pode fazer com que a frequência de cruzamento de ganho seja reduzida sem alterações significativas na fase nesta faixa de frequências. Assim sendo, o projeto do controlador em atraso passa por determinar qual a nova frequência de cruzamento de ganho desejada, que deverá ser tal que a especificação de margem de fase será satisfeita. Como a margem de fase

¹⁰A margem de ganho será sempre infinita quando a função de laço tiver apenas dois pólos estáveis.

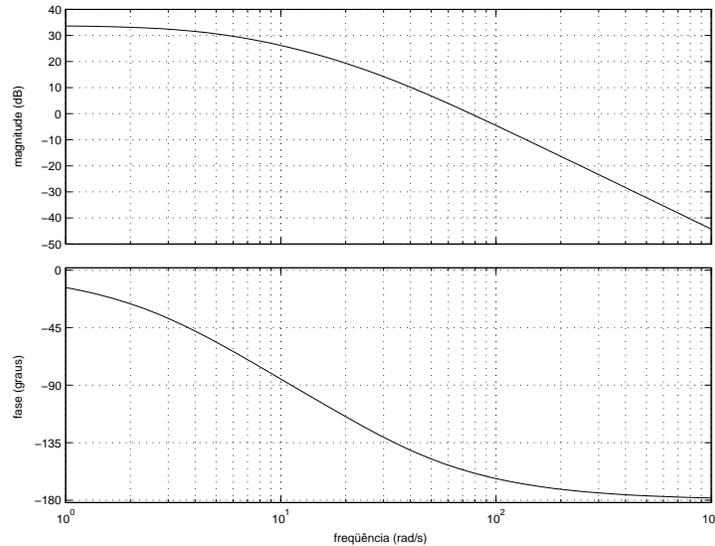


Figura 6.10 - Resposta em frequência da função $\tilde{L}(s)$ para o motor CC com controle proporcional com $K = 980$

é dada por $MF = 180^\circ + L(j\omega_0)$, e o valor especificado é $MF > 40^\circ$, tem-se que a função de laço deve satisfazer $L(j\omega_0) > -140^\circ$. Ou seja, a nova frequência de cruzamento de ganho deve ser aquela na qual a fase da função de laço atinge o valor de -140° .

Observa-se na Figura 6.10 que essa frequência está em torno de $40 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ e, portanto, o controlador em atraso deve ser projetado de tal forma que a nova frequência de cruzamento de ganho seja $\omega_0 < 40 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Escolhemos $\omega_0 = 30 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ (a razão para esta escolha ficará clara logo adiante). Então o controlador deve satisfazer:

$$|L(j\omega_0)| = K |\bar{C}(j30)G(j30)H(j30)| = 1$$

O valor de $K |G(j30)H(j30)|$ pode ser lido no gráfico como sendo aproximadamente igual a 14 dB, ou 5. Podemos calcular o valor exato

Capítulo 6 Resposta em frequência

como:

$$\begin{aligned} K |G(j30)H(j30)| &= 980 \left| \frac{5}{j0,2 \times 30 + 1} \frac{0,01}{j0,04 \times 30 + 1} \right| \\ &= \frac{49}{\sqrt{6^2 + 1^2} \sqrt{1,2^2 + 1^2}} = 5,157 \end{aligned}$$

Para que $\omega_0 = 30 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ deve-se ter $\bar{C}(j\omega_0) = \frac{1}{5,157} = 0,194$ ou $C(j\omega_0) = K\bar{C}(j\omega_0) = 190$.

Agora, utilizando a relação (6.9), tem-se que $K\frac{1}{\alpha} = 190$ ou simplesmente $\bar{C}(j\omega_0) \approx \frac{1}{\alpha} = 0,194$, e portanto $\alpha = 5,157$. Finalmente, basta escolher T de forma a satisfazer a restrição $T\omega_0 \gg 1$, ou seja, $T \gg \frac{1}{30}$. Escolhemos $T = \frac{1}{3}$ s e o projeto do controlador está completo:

$$C(s) = 980 \frac{1 + 0,333s}{1 + 1,719s} = 190 \frac{s + 3}{s + 0,582} \quad (6.10)$$

A resposta em frequência da função de laço com o controlador projetado é apresentada na Figura 6.11. A margem de fase é de 45° , ligeiramente maior do que o valor para o qual o projeto foi realizado.

A resposta deste sistema, com o controlador em atraso projetado, a um salto unitário em sua referência, é apresentada na Figura 6.12. Para efeito de comparação, é apresentada na mesma figura a resposta a um salto unitário na referência caso fosse aplicado o controlador puramente proporcional para obter o mesmo desempenho de regime permanente, ou seja, $C(s) = K = 980$. Lembre que, conforme a análise anterior, nesse caso o sistema seria estável e o desempenho de regime permanente seria adequado, porém a margem de fase seria de apenas 22° . Note na figura o efeito do bloco de atraso sobre o desempenho transitório do sistema: o comportamento torna-se muito menos oscilatório com o controlador em atraso, com grande redução do sobrepasso, enquanto o tempo de acomodação é aproximadamente o mesmo nos dois casos. Essas figuras ilustram a relação estreita - porém não unívoca - entre o desempenho transitório no domínio do tempo e as margens de estabilidade.

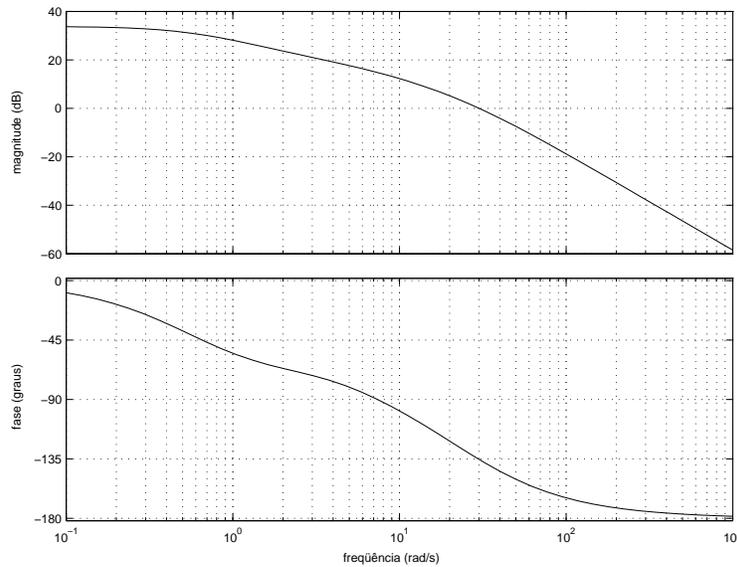


Figura 6.11 - Resposta em frequência da função de laço para o motor CC com o controlador (6.10)

É importante notar que a solução para o problema de projeto não é única, e o projetista tem certa liberdade para arbitrar valores dos parâmetros do controlador, desde que satisfeitas as restrições de desempenho. No exemplo anterior, foi inicialmente arbitrada a nova frequência de cruzamento de ganho ω_0 , de forma que a fase da função de laço nesta frequência fosse maior do que um valor especificado. A análise indicava que essa frequência deveria ser menor do que $40 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ e se escolheu um valor menor, $\omega_0 = 30 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, a fim de garantir certa folga no projeto. Essa folga é importante porque o procedimento adotado para o projeto se baseia na hipótese de que a fase da função de transferência do controlador será nula na frequência ω_0 , o que é apenas uma aproximação. Outros valores poderiam ter sido arbitrados para ω_0 , desde que coerentes com este raciocínio. A constante de

Capítulo 6 Resposta em frequência

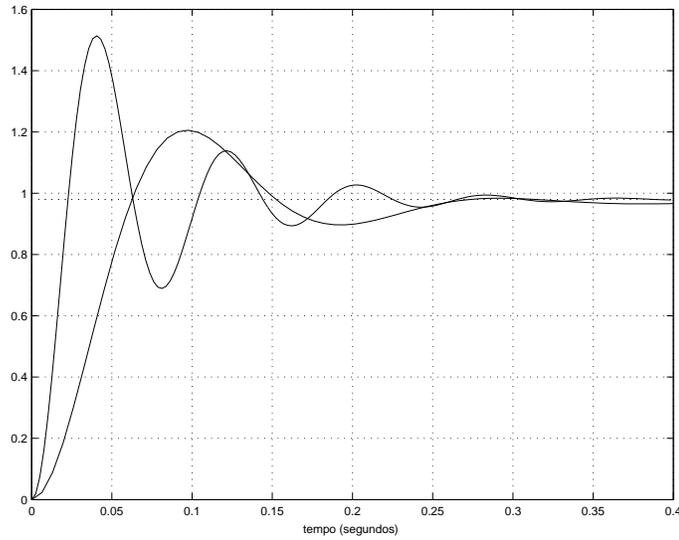


Figura 6.12 - Resposta do motor de corrente contínua ao salto de referência de velocidade com o controlador em atraso e com o controlador proporcional

tempo T , por sua vez, foi escolhida para satisfazer de forma aproximada a esta hipótese, o que é obtido fazendo-a suficientemente grande, ou $T \gg \frac{1}{\omega_0}$. A princípio, quanto maior essa constante de tempo, mais próxima de zero seria a fase do controlador na frequência de cruzamento de ganho e, portanto, pode parecer conveniente escolher um valor tão grande quanto possível para T . Porém, valores muito grandes podem levar a dificuldades de implementação e desempenho transitório ruim, o que estabelece limites superiores para os valores deste parâmetro. O critério de arbitrar um valor cerca de uma ordem de grandeza superior ao mínimo (ou seja, $T \approx \frac{10}{\omega_0}$) é adequado na maioria dos casos.

O procedimento utilizado no último exemplo pode ser formalizado nos seguintes passos:

- determinar o ganho K para atender à especificação de desempenho em regime permanente;
- determinar o valor da frequência ω_1 na qual $\angle KG(j\omega_1)H(j\omega_1) = -180^\circ + MF + \Delta$, onde Δ é um fator de folga que visa compensar as aproximações feitas na dedução das equações de projeto;
- escolher o parâmetro α do controlador como

$$\alpha = | KG(j\omega_1)H(j\omega_1) |$$

- escolher o parâmetro T do controlador de forma que o atraso de fase se dê apenas em frequências muito inferiores à frequência ω_1 , ou seja, $T \gg \frac{1}{\omega_1} > \frac{1}{\alpha\omega_1}$.

Na maioria dos casos em que um controlador em atraso é suficiente para satisfazer os requisitos de desempenho, este procedimento é bem-sucedido. Porém, sempre é necessária a validação do projeto pela verificação *a posteriori* da satisfação dos requisitos e muitas vezes um ajuste fino é necessário ou, pelo menos, conveniente.

Exemplo 6.5 A resposta em frequência apresentada na Figura 6.13 foi obtida para um processo de controle da tensão terminal de um gerador síncrono trifásico conectado à rede elétrica, onde o controle é realizado pela tensão de campo do gerador (a modelagem dessa classe de processos pode ser encontrada em Kundur (1994)). Projete um controlador em atraso para controlar a tensão terminal desse gerador atendendo às seguintes especificações:

- erro de regime permanente inferior a 0,5%;
- margem de ganho igual ou superior a 2;
- margem de fase igual ou superior a 45° .

A variável manipulada deste processo é a tensão de campo do gerador e a variável controlada é sua tensão terminal. A resposta em frequência desse processo é dada na Figura 6.13.

Capítulo 6 Resposta em frequência

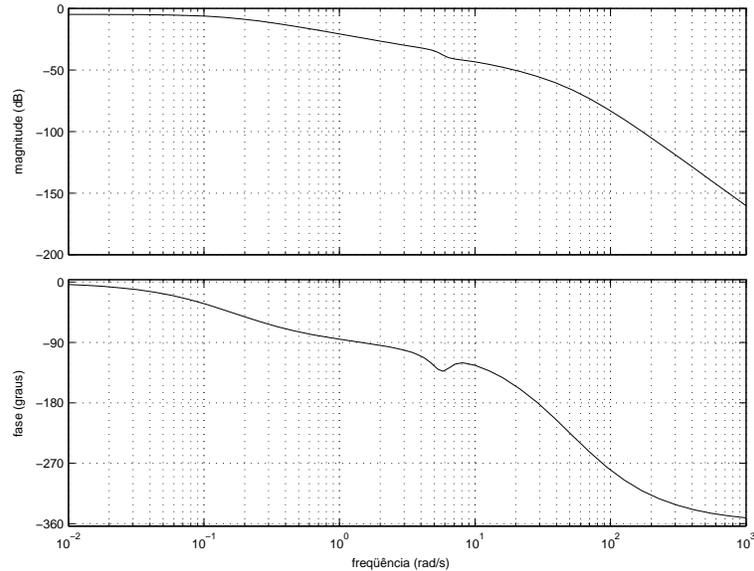


Figura 6.13 - Resposta em frequência de um gerador síncrono conectado à rede elétrica

Inicialmente é determinado o ganho K para obter o desempenho desejado em regime permanente. O erro de regime permanente é dado por $e_{RP} = \frac{1}{1+C(0)G(0)H(0)} = \frac{1}{1+KG(0)}$. O valor de $G(0)$ pode ser lido na figura como $G(0) = -4,9$ dB, o que corresponde a $G(0) = 0,57$. Portanto,

$$e_{RP} = \frac{1}{1 + KG(0)} = 0,005 \rightarrow K = 349$$

Suponha que um controlador puramente proporcional com esse ganho fosse implementado. Então a resposta em frequência da função de laço com este ganho seria aquela apresentada na Figura 6.14.

Com esse controlador proporcional, o desempenho de regime permanente desejado seria atendido. Por outro lado, a frequência na qual a função de laço atinge um módulo igual a 1 (0 dB) é aproximadamente igual a $21 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ e nesta mesma frequência a fase é de aproximadamente -160° . Portanto, a margem da fase com o controlador puramente pro-

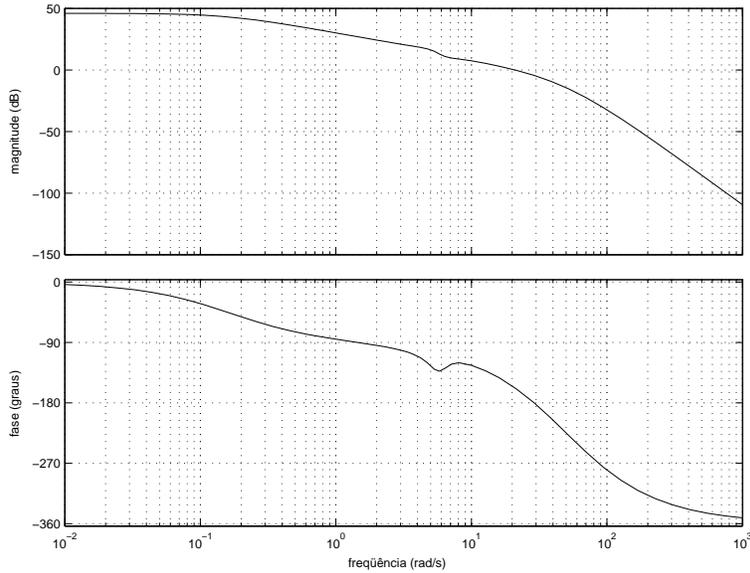


Figura 6.14 - Resposta em frequência do gerador síncrono com controle proporcional

porcional seria de 20° , o que não atende à especificação de desempenho no domínio da frequência. A fim de atender a essa especificação, vamos incluir na função de laço uma função de transferência que reduza seu módulo nas frequências próximas a $21 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ sem alterar significativamente sua fase nesta mesma faixa de frequências. Dessa forma, a frequência de cruzamento de ganho será reduzida para um valor no qual a fase será maior, resultando em uma margem de fase maior. Esta deformação na característica da resposta em frequência é obtida com um controlador em atraso.

A margem de fase especificada é de 45° , portanto se deseja que a nova frequência de cruzamento de ganho seja aquela na qual a fase é de 135° . Verifica-se na Figura 6.14 que essa frequência é igual a $13,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Deseja-se então que $|C(j13,5)G(j13,5)H(j13,5)| = 1$. Como $|KG(j13,5)| = 1,72$ ($=4,7$ dB lido na figura) e $H(s) = 1$,

Capítulo 6 Resposta em frequência

deve-se ter

$$|\bar{C}(s)| = \left| \frac{1 + Ts}{1 + \alpha Ts} \right|_{s=j13,5} = \frac{1}{|KG(j13,5)H(j13,5)|} = \frac{1}{1,72}$$

A fim de não modificar a fase nesta faixa de frequências, as singularidades do controlador devem ser muito menores do que a frequência de cruzamento de ganho, o que implica que:

$$\left| \frac{1 + Ts}{1 + \alpha Ts} \right|_{j13,5 \approx} \left| \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1 + Tj\omega}{1 + \alpha Tj\omega} \right| = \frac{1}{\alpha}$$

e, portanto, $\alpha = 1,72$. Por segurança escolhemos um valor ligeiramente maior, $\alpha = 2$, o que resultará em uma frequência de cruzamento de ganho ainda menor.

Resta somente escolher T , para o qual a única restrição é que tanto o pólo do controlador (dado por $\frac{1}{\alpha T}$) e o zero (dado por $\frac{1}{T}$) devem ter valores muito inferiores à frequência de cruzamento de ganho:

$$\frac{1}{2T} < \frac{1}{T} \ll 13,5$$

Valores entre uma e duas décadas menor são adequados, então escolhemos $T = 4$. Com essas escolhas a função de transferência do controlador fica:

$$C(s) = 349 \frac{4s + 1}{8s + 1}$$

e a resposta em frequência da função de laço resultante é aquela apresentada na Figura 6.15, juntamente com a resposta em frequência antes da inserção do bloco de atraso.

Pode-se verificar na figura o efeito do bloco de atraso sobre a resposta em frequência: um atraso de fase nas baixas frequências e uma redução de módulo nas altas, conforme desejado. Conforme pode ser visto na figura, a nova frequência de cruzamento de ganho é igual a $11,7 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, frequência na qual a fase é igual a -130° , resultando em uma margem de fase de 50° , portanto dentro da especificação. Resta ainda verificar o atendimento da especificação de margem de ganho. A frequência na qual a fase é igual a -180° é $\omega_\pi = 28,9 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ e nesta frequência o módulo lido no gráfico é aproximadamente -10 dB, ou

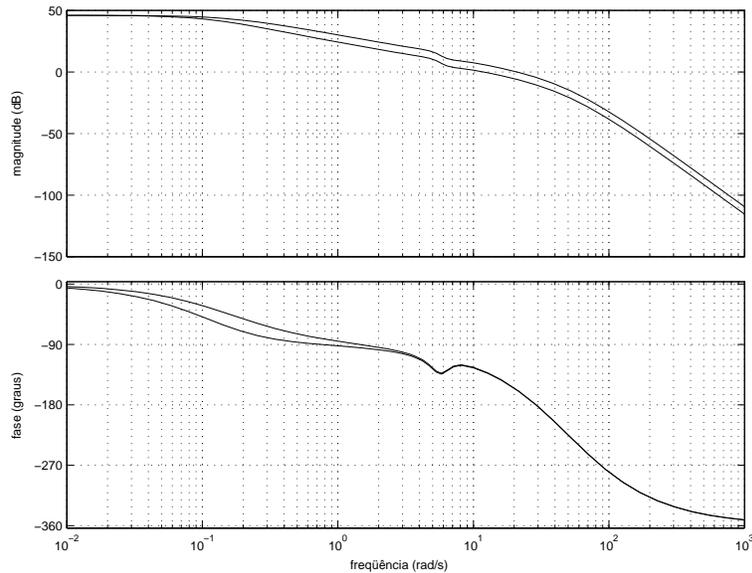


Figura 6.15 - Resposta em frequência do gerador síncrono com controlador em atraso

seja, 0,3. Isso resulta em uma margem de ganho superior a 2, conforme especificado.

A resposta deste sistema, com o controlador em atraso projetado, a um salto unitário em sua referência, é apresentada na Figura 6.16. Para efeito de comparação, é apresentada na Figura 6.17 a resposta a um salto unitário na referência caso fosse aplicado o controlador puramente proporcional para obter o mesmo desempenho de regime permanente, ou seja, $C(s) = K = 349$. Novamente se pode notar na figura o efeito do bloco de atraso sobre o desempenho transitório do sistema: o comportamento torna-se muito menos oscilatório com o controlador em atraso, com o sobrepasso sendo reduzido de cerca de 60% para pouco mais de 20%, mantendo-se aproximadamente o mesmo tempo de acomodação.

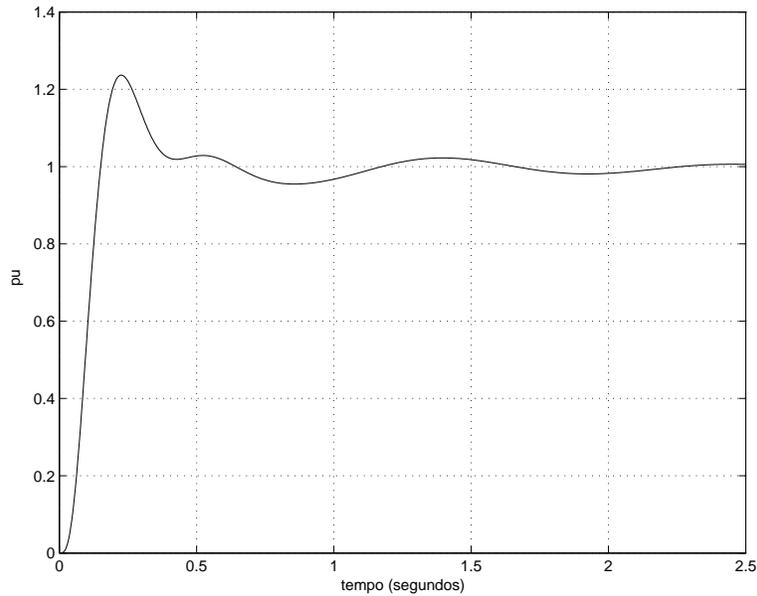


Figura 6.16 - Resposta do gerador síncrono ao salto de referência de tensão com o controlador em atraso

6.4 Controladores em avanço

A função de transferência de um controlador em avanço, assim como a do controlador em atraso, é dada por um função da forma:

$$C(s) = K \frac{1 + sT}{1 + s\alpha T}$$

porém com $\alpha < 1$, ao contrário do controlador em atraso. Por construção, a fase dessa função de transferência é sempre positiva, portanto este sistema insere um avanço de fase em qualquer sinal senoidal que seja aplicado à sua entrada; daí o nome de controlador *em avanço*. Com efeito:

$$\angle C(j\omega) = \arctan \omega T - \arctan \alpha \omega T$$

e uma vez que $\alpha < 1$, o segundo termo desta subtração é sempre menor do que o primeiro e $\angle C(j\omega) \geq 0 \forall \omega$.

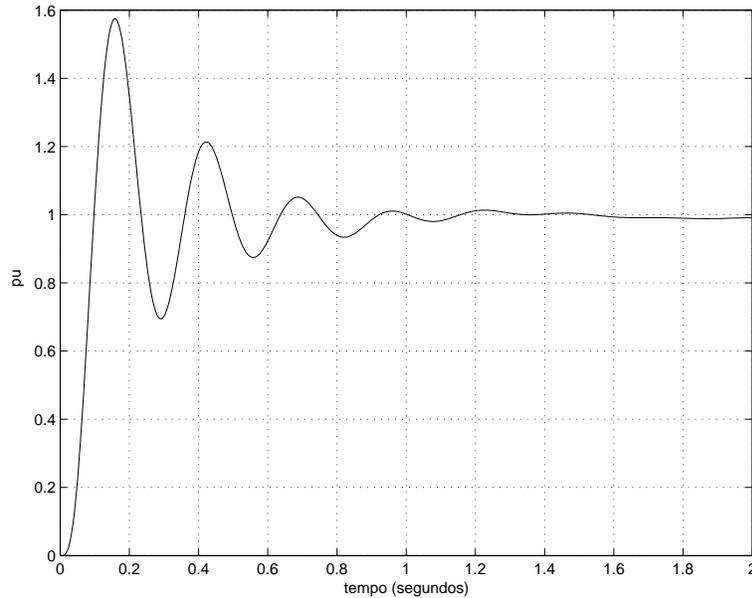


Figura 6.17 - Resposta do gerador síncrono ao salto de referência de tensão com controle proporcional

A resposta em frequência de um controlador em avanço é apresentada na Figura 6.18. Nota-se que efetivamente a fase inserida pelo controlador em um sinal qualquer é sempre positiva. O efeito benéfico de um bloco de avanço no laço de controle vem justamente deste avanço de fase, pois aumentando a fase da função de laço em uma faixa de frequências específica pode-se obter aumento da margem de fase. Para obter o máximo benefício do controlador, o projeto é realizado de forma que o máximo valor de avanço de fase seja fornecido na frequência de cruzamento de ganho. Então é importante poder calcular a frequência na qual o avanço atinge seu valor máximo.

Para determinar o valor máximo da fase, determinamos a derivada da função $\angle C(j\omega)$ para encontrar suas raízes.

$$\frac{d\angle C(j\omega)}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}(\arctan \omega T - \arctan \alpha\omega T)$$

Capítulo 6 Resposta em frequência

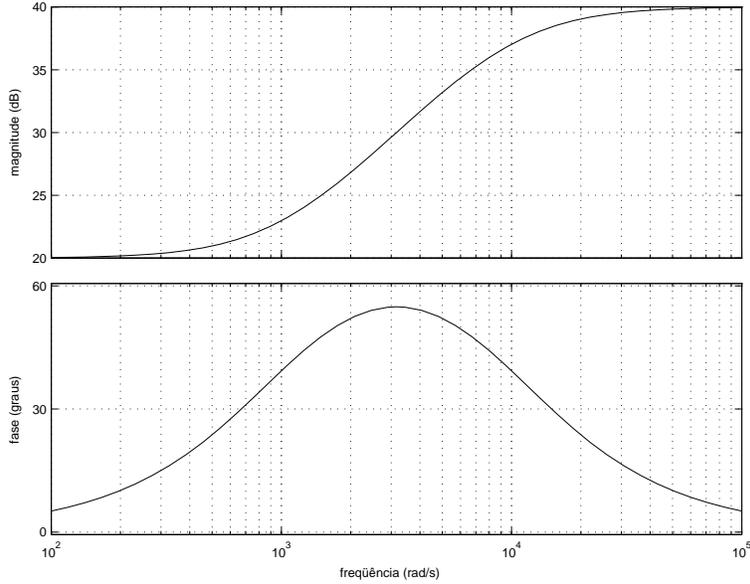


Figura 6.18 - Resposta em frequência de um controlador em avanço com $K = 10$, $T = 1$ ms, $\alpha = 1/10$

$$= \frac{T}{1 + (\omega T)^2} - \frac{\alpha T}{1 + (\alpha \omega T)^2} = 0$$

Então:

$$(\alpha^2 - \alpha)(\omega T)^2 + 1 - \alpha = \alpha(\alpha - 1)(\omega T)^2 - (\alpha - 1) = 0$$

e, portanto, $\alpha(\omega T)^2 = 1$. Logo existe somente uma frequência finita e não nula, que será denominada ω_m , para a qual a derivada se anula e esta frequência é dada por $\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$.

Note que as singularidades do controlador consistem de um pólo e um zero, posicionados respectivamente nas seguintes frequências: $p = \frac{1}{\alpha T}$ e $z = \frac{1}{T}$. Se tomarmos a média geométrica dessas duas frequências temos $\sqrt{z p} = \frac{1}{\sqrt{T\alpha T}} = \omega_m$.

Portanto, o valor máximo da fase do controlador se dá justamente na frequência igual à média geométrica das singularidades do contro-

lador, um fato que será utilizado no projeto para determinar o valor do parâmetro T do controlador. Por outro lado, o valor máximo deste avanço de fase pode ser determinado substituindo ω_m em $\angle C(j\omega)$.

$$\begin{aligned} \max \angle C(j\omega) = \angle C(j\omega_m) &= \arctan \omega_m T - \arctan \alpha \omega_m T = \\ &= \arctan \frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \arctan \sqrt{\alpha} \\ &= \arcsin \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \end{aligned} \quad (6.11)$$

Assim, o valor máximo de avanço de fase fornecido pelo controlador depende do parâmetro α . O conhecimento desta função também é fundamental no projeto de um controlador em avanço, na medida em que determina a escolha do parâmetro α do controlador. Para facilitar essa escolha, costuma-se representar a função (6.11) em forma gráfica, como na Figura 6.19.

Porém, o bloco de avanço causa também um aumento no módulo da resposta em frequência, o que altera a frequência de cruzamento de ganho. Ao contrário do controlador em atraso, não é possível separar estes efeitos em faixas de frequências distintas, o que dificulta o projeto.

Exemplo 6.6 Considere novamente o motor CC controlado por corrente, com sensor tacométrico, do exemplo 6.4, com as mesmas especificações de desempenho: $e_{RP} \leq 2\%$, $MG \geq 2$ e $MF \geq 40^\circ$. Para atender à especificação de desempenho em regime permanente, é necessário que $K \geq 980$. Fazendo $K = 980$, como no exemplo 6.4, tem-se a resposta em frequência da função $KG(s)H(s)$ apresentada na Figura 6.10, onde se observa que a margem de ganho é infinita e a margem de fase é de aproximadamente 22° .

Vamos utilizar um compensador em avanço, que aumentará a fase da função de laço na frequência de cruzamento de ganho. Para atender à especificação de $MF \geq 40^\circ$, é necessário que este aumento seja de pelo menos $40^\circ - 22^\circ = 18^\circ$. Escolhemos então fazer com que o controlador forneça um aumento de fase de 30° na frequência de cruzamento

Capítulo 6 Resposta em frequência

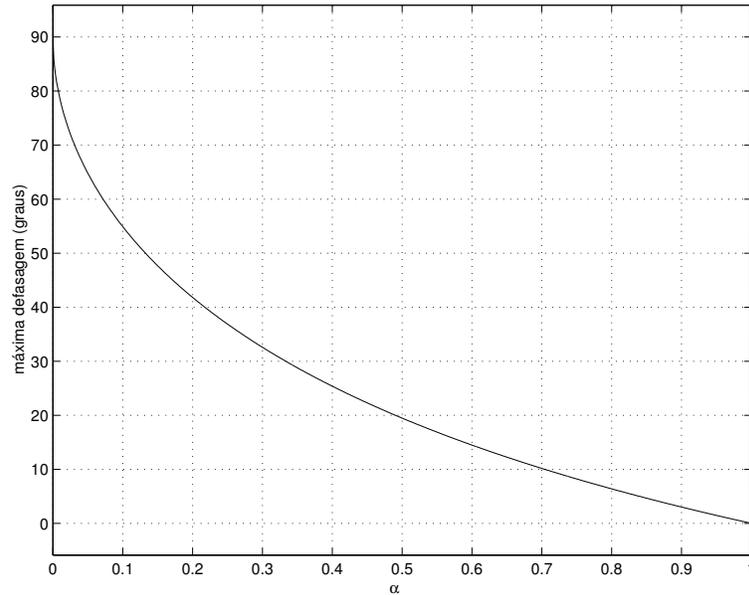


Figura 6.19 - Máximo avanço de fase do controlador em avanço em função do parâmetro α como na equação (6.11)

de ganho.¹¹

Agora lembre que, conforme a discussão anterior, o parâmetro α do controlador define o máximo aumento de fase fornecido pelo controlador e o parâmetro T define em qual frequência este avanço se dará. Vamos então escolher α de forma que o máximo avanço seja aquele desejado (30°) e T de forma que este avanço se dê na frequência desejada (a frequência de cruzamento de ganho).

Para escolher o parâmetro α do controlador basta consultar a Figura 6.19, onde se verifica que um avanço máximo de 30° é alcançado com $\alpha \approx 0,33$. Esse valor poderia também ser determinado com exatidão resolvendo a equação:

$$\max \angle C(j\omega) = \arctan \frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \arctan \sqrt{\alpha} = 30^\circ \quad (6.12)$$

¹¹Este avanço é bastante superior ao mínimo calculado, e a razão para esta discrepância será esclarecida em seguida.

o que forneceria o valor $\alpha = 1/3$.

Definidos os parâmetros K e α do controlador, resta escolher o parâmetro T . Esse deve ser escolhido de forma que o máximo avanço de fase se dê na frequência de cruzamento de ganho, ou seja, tal que:

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha}T} = \omega_0 \rightarrow T = \frac{1}{\sqrt{\alpha}\omega_0} \quad (6.13)$$

Porém, a introdução do controlador em avanço altera não somente a fase da função de laço em frequências próximas à frequência de cruzamento de ganho, mas também seu módulo nesta mesma faixa de frequências. Devido a essa alteração do módulo, o controlador em avanço *altera a frequência de cruzamento de ganho* da função de laço. Para que ω_m seja igual à *nova* frequência de cruzamento de ganho ω_0 , ou seja, $\omega_0 = \omega_m$, deve-se ter:

$$|L(j\omega_0)| = |L(j\omega_m)| = K |\bar{C}(j\omega_m)| |G(j\omega_m)H(j\omega_m)| = 1$$

mas,

$$|\bar{C}(j\omega_m)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

e, portanto, devemos ter $K |G(j\omega_m)H(j\omega_m)| = \sqrt{\alpha}$. Logo, a nova frequência de cruzamento de ganho será aquela na qual o módulo da função de laço sem a presença do bloco em avanço (ou seja, $K |G(j\omega)H(j\omega)|$) atinge o valor $\sqrt{\alpha}$. Pode-se obter da Figura 6.10 o valor $\omega_0 \approx 100 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Assim, devemos escolher $T = \frac{1}{\sqrt{\alpha}\omega_0} = 0,0173$ s.

Com estas escolhas para os valores dos parâmetros, a função de transferência do controlador em avanço fica:

$$C(s) = 980 \frac{1 + 0,0173 s}{1 + 0,0058 s} = 2940 \frac{s + 57,73}{s + 172,41}$$

O diagrama de Bode da função de laço com esse controlador é apresentado na Figura 6.20, juntamente com o diagrama obtido anteriormente, sem a adição do bloco em avanço para comparação. É claramente visível a contribuição do controlador, aumentando a fase e o módulo da função de laço, e a margem de fase pode ser medida como $MF \approx 47^\circ$.

Capítulo 6 Resposta em frequência

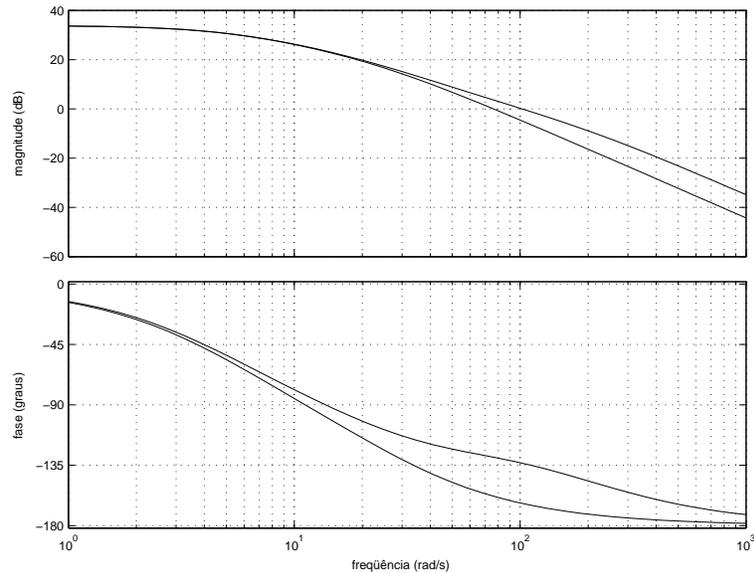


Figura 6.20 - Resposta em frequência da função de laço para o motor CC com controlador em avanço

A resposta deste sistema a um salto unitário em sua referência, com o controlador em avanço, é apresentada na Figura 6.21, juntamente com a resposta obtida com o controlador em atraso no exemplo 6.4. Note que ambos os controladores resultam aproximadamente no mesmo sobrepasso, porém o tempo de acomodação é sensivelmente menor com o controlador em avanço.

Fica aparente na Figura 6.20 o motivo para a escolha feita anteriormente de projetar um avanço de 30° . A margem de fase obtida sem o bloco em avanço, utilizando apenas o controle proporcional, era de $MF = 180^\circ - \angle KG(j\omega_0)H(j\omega_0) = 22^\circ$, portanto, em princípio, apenas um avanço adicional de $40^\circ - 22^\circ = 18^\circ$ parece necessário para atender à especificação de $MF = 40^\circ$. Porém, o controlador em avanço aumenta a frequência de cruzamento de ganho, de forma que, em sua

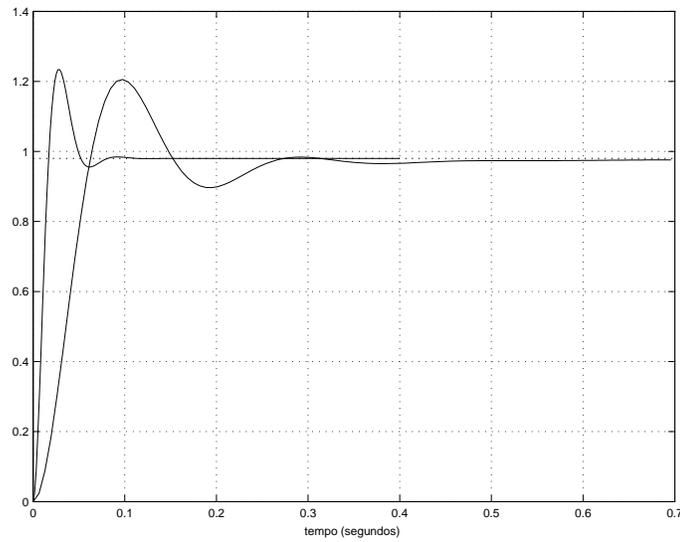


Figura 6.21 - Resposta do motor de corrente contínua ao salto de referência de velocidade com o controlador em avanço

presença, a fase $\angle KG(j\omega_0)H(j\omega_0)$ será mais negativa. Assim, além de fornecer os 18° adicionais de fase, o controlador deve compensar a redução na fase de $KG(j\omega_0)H(j\omega_0)$ causada por ele mesmo. Como essa redução da fase não é conhecida *a priori*, pois depende do próprio controlador, um valor adicional de 12° foi estabelecido *ad hoc*, resultando na especificação de um avanço de 30° .

O procedimento utilizado para o projeto do controlador em avanço baseia-se na busca sistemática da especificação de margem de fase, sendo a especificação de margem de ganho verificada somente *a posteriori*. Se essa não fosse atendida, então seria necessário refazer o projeto, desta vez buscando sistematicamente atender à especificação de margem de ganho. Alternativamente, o projeto pode ser conduzido tendo como ponto de partida o atendimento da especificação de margem de ganho, verificando posteriormente a margem de fase.

Capítulo 6 Resposta em frequência

O procedimento adotado no exemplo pode ser formalizado nos seguintes passos:

- determinar o ganho K para atender à especificação de desempenho em regime permanente;
- determinar a margem de fase obtida com controle proporcional $MF_p = -180^\circ + \angle KG(j\omega_0)H(j\omega_0)$ e o valor do avanço a ser fornecido pelo controlador como $\phi = MF_d - MF_p + \Delta_\phi$, onde MF é a margem de fase desejada e Δ_ϕ é um valor positivo determinado *ad hoc*;
- consultar a Figura 6.19 ou resolver a equação (6.11) para obter o valor do parâmetro α ;
- determinar a nova frequência de cruzamento de ganho como:

$$\omega_0 : K | G(j\omega)H(j\omega) | = \sqrt{\alpha} \quad (6.14)$$

- calcular o parâmetro $T = \frac{1}{\sqrt{\alpha}\omega_0}$;
- verificar o atendimento da especificação de margem de ganho.

Exemplo 6.7 Considere novamente o sistema do exemplo 6.5. Um controlador em atraso foi projetado, alcançando os seguintes índices de desempenho: $e_{RP} \leq 2\%$, $MF = 50^\circ$ e $MG = 10,5$ dB. Deseja-se agora aumentar ainda mais as margens de estabilidade desse sistema, mantendo o mesmo desempenho de regime permanente. Para isso vamos adicionar ao controlador um bloco de avanço, de forma que a função de transferência do controlador será dada por:

$$C(s) = K\bar{C}(s) = K\bar{C}_{at}(s)\bar{C}_{av}(s)$$

onde $K\bar{C}_{at}(s)$ é a função de transferência do controlador projetado no exemplo 6.5 e $\bar{C}_{av}(s)$ é a função de transferência do bloco de avanço que queremos projetar agora para aumentar as margens de estabilidade. Uma margem de fase de 65° é desejada, o que torna o sistema

mais robusto contra a existência de dinâmica não modelada e reduz o sobrepasso na resposta ao salto.

O projeto é realizado seguindo o procedimento já apresentado. A margem de fase desejada é 15° superior à margem de fase já obtida, logo o valor do avanço a ser fornecido pelo bloco em avanço deve ser $\phi = 15^\circ + \Delta_\phi = 25^\circ$. Em seguida, consultando a Figura 6.19, verifica-se que é necessário escolher $\alpha \approx 0,4$ para que o controlador forneça um avanço desta magnitude. A nova frequência de cruzamento de ganho será aquela em que a função de laço do sistema sem o bloco em avanço, ou seja, $K\bar{C}_{at}(j\omega)G(j\omega)H(j\omega)$, apresenta módulo igual a $\sqrt{\alpha}$. Sabendo que $\sqrt{\alpha} = 0,63$, ou -4 dB, o valor de ω_0 é obtido da Figura 6.15 como $\omega_0 \approx 25 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.¹²

Então $T = \frac{1}{\sqrt{\alpha}\omega_0} = 0,0632$ s e a função de transferência do controlador fica:

$$C(s) = K\bar{C}_{at}(s)\bar{C}_{av}(s) = 349 \frac{4s + 1}{8s + 1} \frac{0,0632s + 1}{0,0253s + 1} \quad (6.15)$$

A resposta em frequência da função de laço do sistema com o controlador dado pela equação (6.15) é apresentada na Figura 6.22. As margens de estabilidade podem ser melhor avaliadas na Figura 6.23, onde a mesma resposta em frequência é apresentada em escala mais detalhada. As margens obtidas são $MG \approx 10$ dB e $MF \approx 65^\circ$. Note que a margem de ganho foi levemente reduzida. Isso não é relevante para este projeto, uma vez que se queria aumentar a margem de fase e a nova margem de ganho ainda está bastante além da especificada, porém é interessante mais uma vez notar as dificuldades antes mencionadas do projeto do controle em avanço.

Finalmente, a resposta do sistema em laço fechado com o controlador projetado é apresentada na Figura 6.24, onde se pode ver uma significativa melhora do sobrepasso e uma discreta redução do tempo de acomodação, alcançada pelo controle em avanço pelo leve aumento da faixa passante do sistema.

¹²Note que neste caso temos conhecimento apenas da resposta em frequência do processo, e não de sua função de transferência, portanto não é possível obter o valor de ω_0 analiticamente.

Capítulo 6 Resposta em frequência

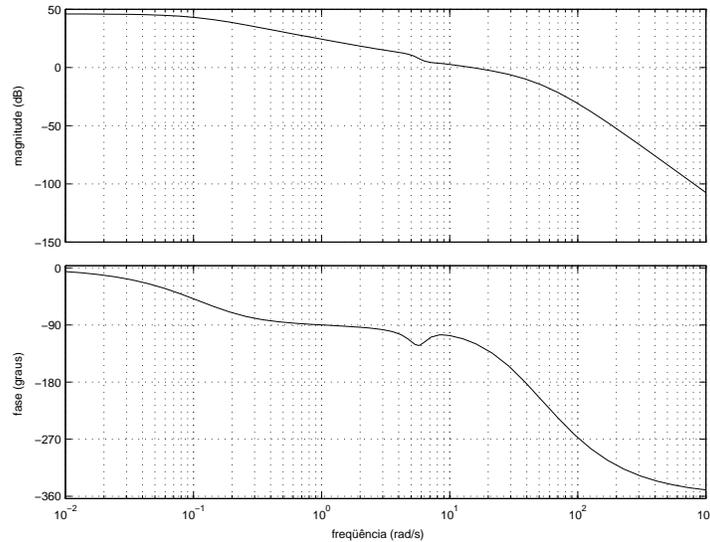


Figura 6.22 - Resposta em frequência do gerador síncrono com controlador em avanço-atraso

6.5 Projeto de controladores PID

Considere o controlador PID na forma:

$$C_{PID}(s) = K\left(1 + \frac{1}{sT_i} + T_d \frac{ps}{s+p}\right) = \bar{K} \frac{s^2 + a_1s + a_0}{s(s+p)} \quad (6.16)$$

Os parâmetros a serem projetados são K , T_i e T_d ou, equivalentemente, \bar{K} e os zeros do controlador, denominados z_1 e z_2 . Suponha inicialmente que os zeros do controlador sejam reais, e $z_1 \leq z_2$. Então a função de transferência pode ser escrita como:

$$C_{PID}(s) = KC_{PI}(s)C_{PD}(s)$$

onde:

$$C_{PI}(s) = \frac{s+z_1}{s} \quad C_{PD}(s) = \frac{s+z_2}{s+p} \quad (6.17)$$

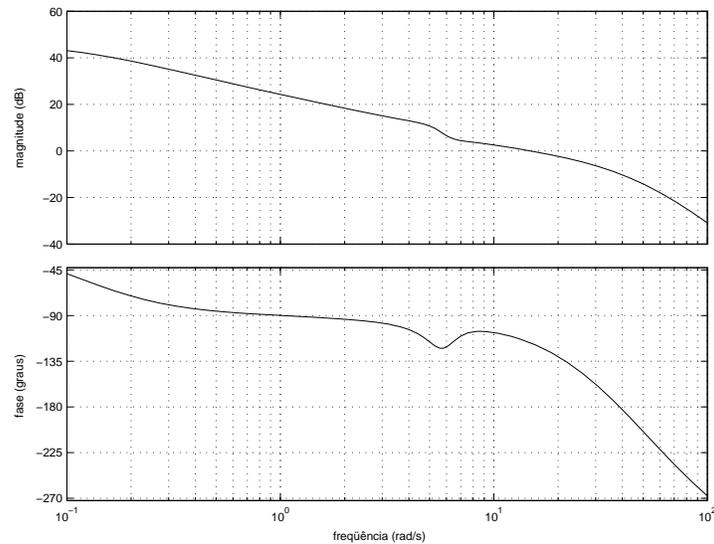


Figura 6.23 - Resposta em frequência do gerador síncrono com controlador em avanço-atraso

Ou seja, o controlador PID pode ser visto como a aplicação em cascata de dois controladores distintos: um controlador PI e um controlador PD, que podem ser projetados separadamente, cada um a seu tempo. Agora note as similaridades das funções de transferência dos blocos PI e PD na equação (6.17) com as funções de transferência dos controladores em avanço e atraso na equação (6.8). Utilizando esta semelhança, podemos adaptar os métodos de projeto descritos para os controladores em avanço e em atraso ao caso de controladores PI e PD.

6.5.1 Controlador PI

Considere o controlador PI na forma:

$$C_{PI}(s) = K\left(1 + \frac{1}{sT_i}\right) = K\frac{s+z}{s} \quad (6.18)$$

Capítulo 6 Resposta em frequência

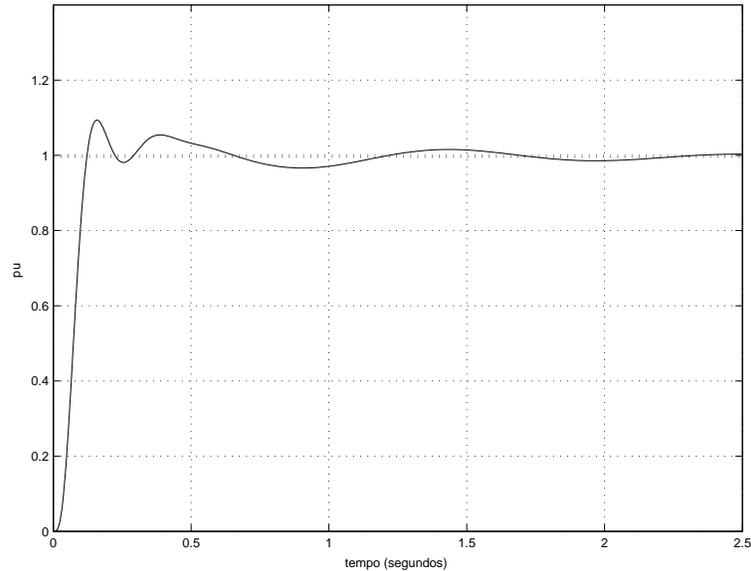


Figura 6.24 - Resposta do gerador síncrono ao salto de referência de tensão com controlador em avanço-atraso

Um controlador PI pode ser visto como um controlador em atraso, já que insere um atraso de fase na função ganho de laço. Na verdade, é conveniente encarar o controlador PI como o caso limite de um controle em atraso, em que o pólo encontra-se em zero (ou $\alpha \rightarrow \infty$):

$$C_{PI}(s) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} K\alpha \frac{1 + T s}{1 + \alpha T s}$$

Desse modo, o projeto do controlador PI pode ser feito pelo mesmo procedimento aplicado ao projeto de controladores em atraso, desde que sejam levadas em conta as peculiaridades decorrentes desta condição limite. A inserção do integrador faz com que o erro de regime permanente a uma referência do tipo salto seja nulo. Pode haver restrições de desempenho em regime permanente para seguimento de referências do tipo rampa e nesse caso o projeto do controlador PI pode ser feito de maneira igual à do controlador em atraso, seguindo o pro-

cedimento apresentado na seção 6.3.1. Por outro lado, se a única exigência de desempenho em regime permanente diz respeito ao seguimento de referência do tipo salto - que é o caso mais comum - então a restrição de projeto sobre o ganho do controlador, que era imposta por esta especificação de desempenho em regime permanente, desaparece, na medida em que o erro de regime permanente com relação a uma referência constante é sempre nulo, independente dos valores escolhidos para os parâmetros do controlador. Nesse caso tem-se um grau de liberdade adicional para o projeto, pois existem dois parâmetros a serem determinados (o ganho K e o zero z_1) e apenas uma restrição a ser satisfeita.

Exemplo 6.8 Considere o controle do processo cuja resposta em frequência é dada na Figura 6.25. Deseja-se projetar um controlador PID para atender aos seguintes requisitos de desempenho: $e_{RP} = 0$, $MG > 2$, $MF \geq 60^\circ$. Vamos efetuar o projeto do PID da forma proposta anteriormente, ou seja, projetando separadamente um PI e um PD, sendo então a função de transferência do PID igual ao produto das funções de transferência desses controladores.

Iniciamos pelo bloco PI, e vamos procurar atender às especificações somente com este controle. Ao contrário do caso dos controladores em avanço e/ou atraso, o desempenho em regime permanente não impõe restrição sobre os parâmetros do controlador, uma vez que o erro de regime permanente será nulo para quaisquer que sejam os valores destes parâmetros. A margem de fase desejada é $MF = 60^\circ$, o que será alcançado se a frequência de cruzamento de ganho ω_0 da função de laço $C_{PI}(j\omega)G(j\omega)H(j\omega)$ for tal que a fase nesta mesma frequência seja igual a -120° , isto é, $\angle C_{PI}(j\omega_0)G(j\omega_0)H(j\omega_0) = -180^\circ + MF = -120^\circ$. Vemos na Figura 6.25 que a frequência na qual a fase da função de laço sem o controlador - $G(j\omega)H(j\omega)$ - atinge este valor é aproximadamente igual a $5,3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

Raciocinando de forma similar ao caso do projeto do controlador em atraso, vamos escolher os parâmetros K e z_1 do controlador PI para que a contribuição do controlador para a fase da função de laço nesta frequência seja desprezível e a frequência de cruzamento de ganho da

Capítulo 6 Resposta em frequência

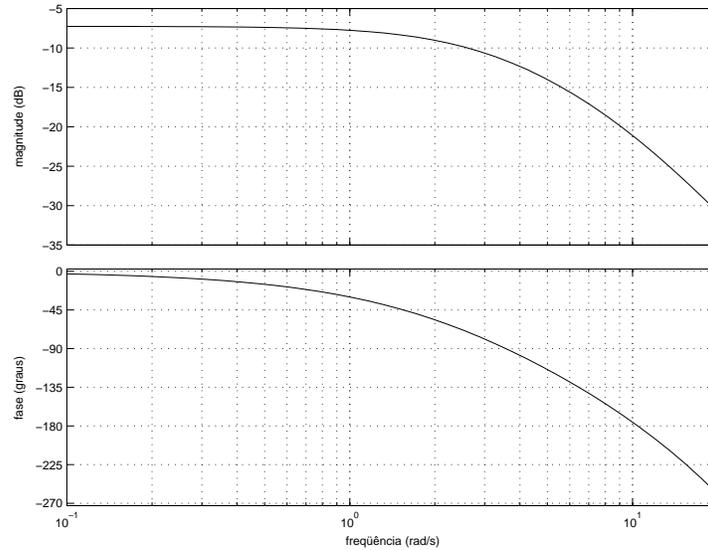


Figura 6.25 - Resposta em frequência do processo para o exemplo 6.8

função de laço com o controlador seja efetivamente esta, ou seja, $\omega_0 = 5,3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Para que a contribuição de fase do controlador seja muito pequena na frequência de $5,3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, fazemos $z_1 = 0,5$ ($\ll 5,3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$). Basta agora determinar K para que:

$$K \left| \frac{j\omega_0 + z_1}{j\omega_0} \right| |G(j\omega_0)H(j\omega_0)| = 1$$

Como $z_1 \ll 5,3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, a contribuição do controlador para o módulo nesta frequência é calculada como:

$$K \left| \frac{j\omega_0 + z_1}{j\omega_0} \right| = K \left| \frac{j5,3 + 0,5}{5,3} \right| \approx K$$

A contribuição do processo para o módulo nesta frequência pode ser obtida a partir da Figura 6.25 como sendo

$$|G(j5,3)H(j5,3)| = -14,3 \text{ dB} = 0,19$$

Portanto,

$$K = \frac{1}{0,19} = 5,2$$

O controlador PI projetado é:

$$C_{PI}(s) = 5,2 \frac{s + 0,5}{s}$$

A resposta em freqüência da função de laço $C_{PI}(s)G(s)H(s)$ com esse controlador é apresentada na Figura 6.26. Pode-se observar que a margem de fase é aquela especificada, e a margem de ganho é aproximadamente $MG \approx 7 \text{ dB} = 2,23$, que é maior do que aquela especificada. A resposta do sistema com este controlador a um salto de referência é apresentada na Figura 6.27.

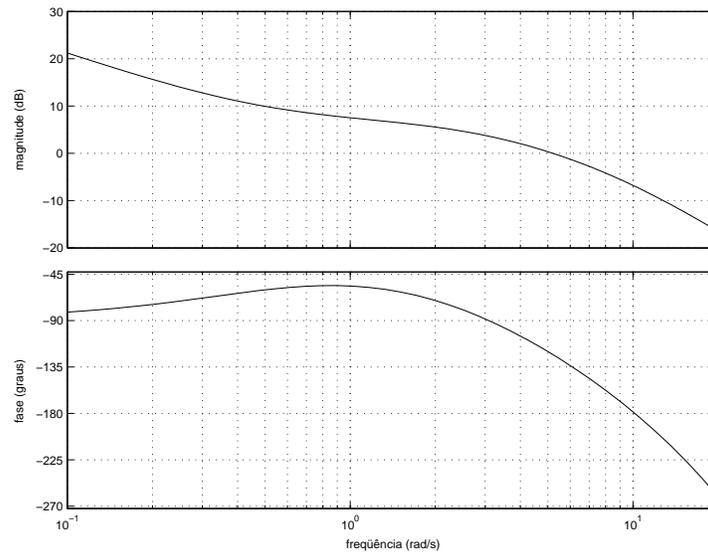


Figura 6.26 - Resposta em freqüência da função de laço com controle PI para o exemplo 6.8

Capítulo 6 Resposta em frequência

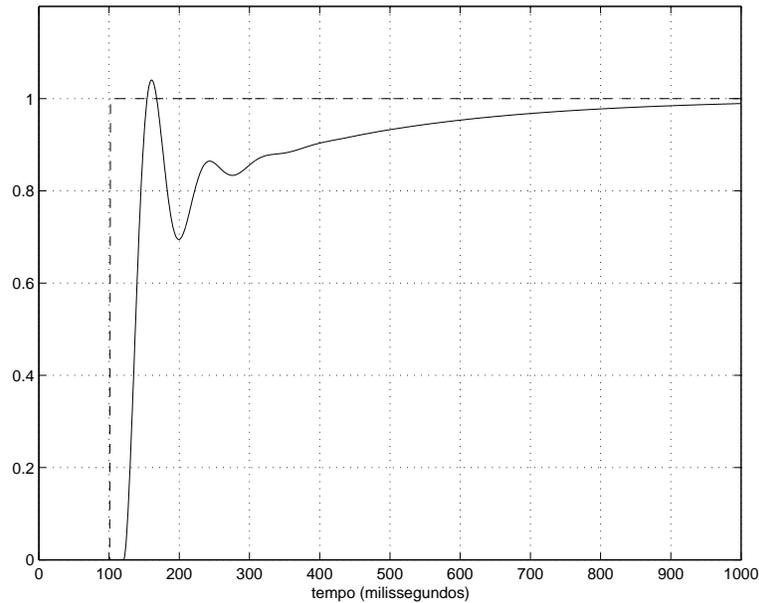


Figura 6.27 - Resposta ao salto unitário de referência com controle PI para o exemplo 6.8

É importante notar que as especificações foram atendidas somente com o controlador PI, sem a necessidade do bloco PD. Entretanto, com este projeto, a banda passante do sistema tende a ser muito estreita, e por conseguinte seu desempenho transitório muito pobre. A margem de fase, e conseqüentemente o máximo sobrepasso da resposta ao salto, poderiam ser melhorados pela redução do ganho do controlador, à custa de estreitar ainda mais a banda passante do sistema, e por conseguinte aumentar ainda mais o tempo de acomodação na resposta ao salto.

Na verdade, desde que o processo seja estável, é *sempre* possível atender, somente com um controlador PI, a especificações da natureza apresentada no exemplo - erro nulo ao salto e margens de estabilidade predefinidas. Para isso basta escolher os dois parâmetros do controlador (zero e ganho) suficientemente pequenos como no exemplo. O

projeto é simples nesse caso, porém o desempenho transitório obtido é tipicamente bastante pobre.

Por outro lado, as especificações de desempenho em regime permanente podem incluir, além do erro nulo ao salto, requisitos de seguimento de referências do tipo rampa. Então a satisfação da especificação de regime permanente determinará o valor mínimo do ganho do controlador, eliminando um dos graus de liberdade do projeto. Nesse caso o controlador PI pode ser insuficiente para atender às especificações.

Nos casos em que o controlador PI somente não é adequado, seja por não atender às especificações de regime permanente e margens de estabilidade, seja por fornecer uma resposta excessivamente lenta, pode-se adicionar um controlador PD em série, resultando assim em um controlador PID.

6.5.2 Controlador PD

O controlador PD tem a função de transferência exatamente da mesma forma que um controlador em avanço, ou seja, do ponto de vista conceitual um controlador PD *é nada mais e nada menos* que um controlador em avanço. Assim sendo, um controlador PD pode ser projetado da mesma forma que um controlador em avanço. A única peculiaridade a ter em conta no projeto de um bloco PD diz respeito à implementação do controlador e à nomenclatura usual na prática industrial. O termo *controlador em avanço* é normalmente utilizado quando existe no sistema de controle um bloco específico com a função de transferência da forma apresentada na equação (6.8) ou quando o próprio projetista se propõe a realizar a implementação do controlador, muitas vezes ainda de forma analógica. Nesses casos tem-se a possibilidade de escolher todos os três parâmetros da função de transferência (K , T e α) durante o projeto.

Já o nome controlador PD refere-se usualmente ao controlador implementado em um bloco contendo um algoritmo ou outra forma de implementação de um controle PID. Nesses casos, o pólo (p) do controlador muitas vezes tem um valor fixo, ajustado pelo fabricante com a finalidade de filtrar ruídos de medição a partir de frequências previamente especificadas. Assim sendo, perde-se um grau de liberdade no

Capítulo 6 Resposta em frequência

projeto, já que um dos parâmetros do controlador é fixo. Além disso, muitas vezes o valor desse parâmetro não é fornecido pelo fabricante do equipamento e, portanto, é desconhecido do projetista. Nesses casos, é necessário supor que este pólo seja suficientemente grande para que possa ser inicialmente desconsiderado no projeto. Ou seja, o controlador PD é encarado no projeto como um caso limite de um controlador em avanço, no qual o pólo do controlador foi fixado no infinito. Isso equivale a fixar o parâmetro $\alpha = 0$ na função de transferência (6.8):

$$C_{PD}(s) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} K \frac{1 + T s}{1 + \alpha T s}$$

Este raciocínio é análogo ao utilizado para o controlador PI, que foi tratado como o caso limite de um controle em atraso, em que o pólo do controlador se encontra em zero.

Então podemos abordar o projeto do controlador PD de maneira similar ao projeto do controlador em avanço, porém as equações a serem utilizadas serão distintas, uma vez que o parâmetro α do controlador tende a zero. Seja, como no caso do projeto do controlador em avanço, ϕ o avanço de fase desejado na frequência de cruzamento de ganho. A contribuição de fase do bloco PD é dada por:

$$\angle C_{PD}(j\omega_0) = \angle(1 + j\omega_0 T) = \arctan(\omega_0 T) = \phi \quad (6.19)$$

e, portanto, $\omega_0 T = \tan \phi$. Por outro lado, o módulo satisfaz:

$$|C_{PD}(j\omega)| = K \sqrt{(T\omega)^2 + 1}$$

logo,

$$\begin{aligned} |C_{PD}(j\omega_0)G(j\omega_0)H(j\omega_0)| &= K \sqrt{(\tan \phi)^2 + 1} |G(j\omega_0)H(j\omega_0)| \\ &= K \frac{1}{\cos \phi} |G(j\omega_0)H(j\omega_0)| = 1 \end{aligned}$$

Assim, a frequência de cruzamento de ganho ω_0 pode ser calculada a partir de:

$$K |G(j\omega_0)H(j\omega_0)| = \cos \phi \quad (6.20)$$

e, uma vez determinada ω_0 , o parâmetro T pode ser calculado como $T = \frac{\tan \phi}{\omega_0}$.

6.5.3 Zeros complexos

Vimos anteriormente o projeto do controlador PID em uma estrutura particular, na qual se escolheu restringir os zeros do controlador a valores reais. Essa estrutura é suficiente para o projeto em muitos casos, mas em outros casos pode ser conveniente escolher zeros complexos, e então não é possível separar o controlador PID em dois estágios como feito anteriormente.

Exemplo 6.9 Considere um processo com a função de transferência:

$$G(s) = \frac{200}{s^2 + 2s + 100}$$

instrumentado com um sensor cuja função de transferência é dada por:

$$H(s) = \frac{400}{s + 400}$$

Esse processo deve ser controlado por um PID cujo pólo de alta frequência é fixo em $p = 1000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. O sistema deve seguir referências do tipo rampa com erro inferior a 5% ($e_{\text{rampa}}(\infty) \leq 0,05$) e atender às seguintes especificações: $MG \geq 3$, $MF \geq 45^\circ$. Note que o processo tem comportamento natural oscilatório, em função do par de pólos complexos com parte real muito menor do que a parte imaginária.

Vamos primeiramente projetar o PID da forma vista anteriormente, com zeros reais, e iniciamos projetando o controlador PI. A fim de atender à especificação de regime permanente, devemos ter um controlador com ganho tal que a função de laço satisfaça $\lim_{s \rightarrow 0} sL(s) \geq 20$.¹³ O zero do controlador deve ter valor pequeno, de forma que o atraso de fase inserido pelo bloco PI se dê em frequências muito baixas. Por outro lado, observe que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{e_{\text{rampa}}(\infty)} &= \lim_{s \rightarrow 0} sL(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sK \frac{s + z_1}{s} G(s)H(s) \\ &= Kz_1 G(0)H(0) = 2Kz_1 \end{aligned}$$

¹³ Isso pode ser verificado por aplicação do teorema do valor final ao problema de seguimento de referências desse tipo.

Capítulo 6 Resposta em frequência

Escolhemos o zero do controlador¹⁴ PI em $z_1 = 1$ e o ganho $K = 10$. Com esse controlador inserido no laço, temos a resposta em frequência apresentada na Figura 6.28. Pode-se observar nessa figura que a frequência de cruzamento de ganho é aproximadamente $\omega_0 \approx 45 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ e que nesta frequência a fase da resposta em frequência é inferior a -180° , portanto o sistema de controle com esse controlador será instável.

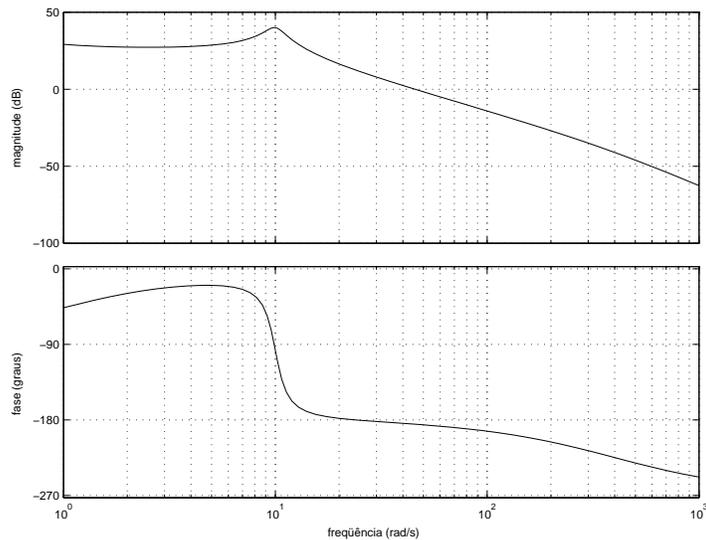


Figura 6.28 - Resposta em frequência para a função $C_{PI}(s)G(s)H(s)$ do exemplo 6.9

Para tornar o sistema estável, e ainda atender à especificação de margem fase, precisamos adicionar cerca de $50^\circ + \Delta = 65^\circ$ à fase. Vamos então utilizar um bloco PD para esta finalidade. Da equação (6.20) temos que:

$$|C_{PI}(j\omega_0)G(j\omega_0)H(j\omega_0)| =$$

¹⁴Verifique que nenhuma outra escolha daria melhor resultado.

$$= 10 \left| \frac{j\omega_0 + 1}{j\omega_0} \frac{200}{(j\omega_0)^2 + 2j\omega_0 + 100} \frac{400}{j\omega_0 + 400} \right| = \cos \phi = 0,42$$

ou:

$$\frac{\sqrt{1 + \omega_0^2}}{\omega_0^2} \frac{200}{\sqrt{(100 - \omega_0^2)^2 + (2\omega_0)^2}} \frac{400}{\sqrt{400 + \omega_0^2}} = 0,042$$

e, portanto, $\omega_0 \approx 69 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Logo $T = \frac{\tan \phi}{\omega_0} = 0,0311 \text{ s}$ ou $z_2 = 32,2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ e o projeto está completo:

$$C_{PID}(s) = 10 \frac{(s + 1)(31,1s + 1000)}{s(s + 1000)}$$

A resposta em frequência da função de laço com este controlador é apresentada na Figura 6.29, juntamente com a resposta em frequência sem o bloco PD para comparação. Pode-se observar que as margens de estabilidade obtidas são $MF \approx 52^\circ$ e $MG \approx 26 \text{ dB}$, dentro das especificações.

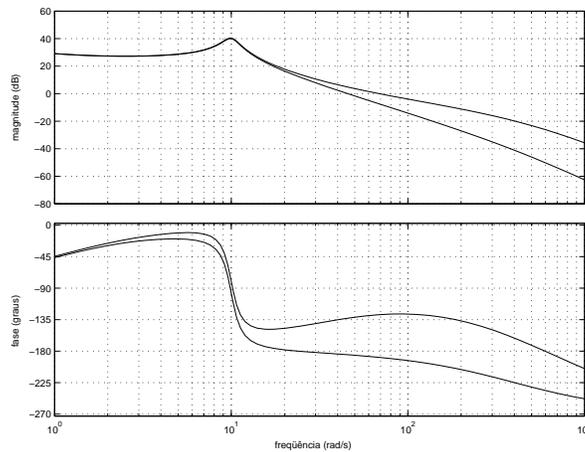


Figura 6.29 - Resposta em frequência para a função de laço com o controle PID de dois estágios do exemplo 6.9

O projeto é adequado, porém uma outra solução, com zeros complexos, seria mais simples e efetiva. A dificuldade do projeto está no

Capítulo 6 Resposta em frequência

pico da resposta em frequência em torno da frequência de $10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, logo se este pico for reduzido pelos zeros do controlador, deve ser mais fácil obter as margens de estabilidade desejadas. Vamos escolher os zeros do controlador na mesma frequência, de forma a reduzir o ganho sensivelmente nesta faixa de frequências. Então a função de transferência do controlador deverá ser $C_{PID}(s) = K \frac{s^2 + 6s + 100}{s(s+1000)}$ e a Figura 6.30 apresenta a resposta em frequência deste controlador para $K = 10$.

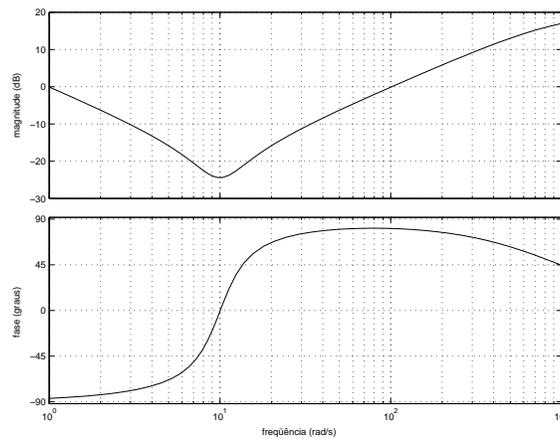


Figura 6.30 - Resposta em frequência do controlador PID com zeros complexos

É fácil verificar que o ganho $K = 100$ é adequado para atingir as margens de estabilidade desejadas. A resposta em frequência da função de laço com este controlador é apresentada na Figura 6.31. As margens de estabilidade são ainda maiores do que obtidas com o projeto em dois passos apresentado anteriormente e o projeto foi mais simples utilizando zeros complexos na função de transferência do controlador.

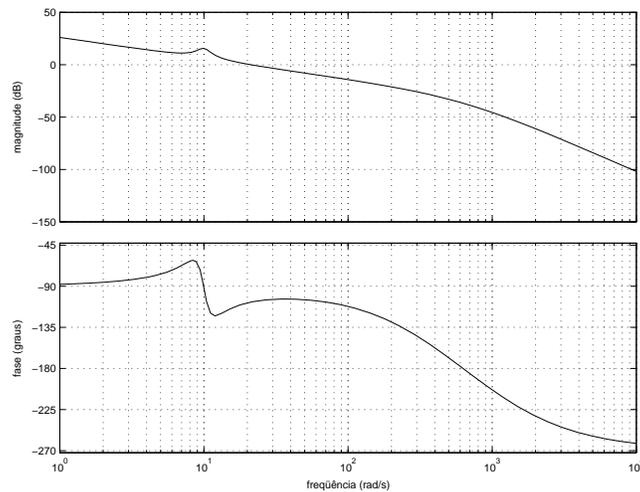


Figura 6.31 - Resposta em frequência da função de laço com o controlador PID com zeros complexos

6.6 Exercícios

- 1) Considere nesse exercício e nos seguintes um sistema de controle com realimentação unitária e perturbação na entrada do processo. O processo cuja resposta em frequência é dada na Figura 6.32 é controlado por controle proporcional.
 - a) Qual deve ser o ganho proporcional para que a margem de fase seja exatamente 30° ?
 - b) Quais são o erro de regime permanente a um salto e a margem de ganho na situação do item anterior?
 - c) Para quais valores de ganho proporcional o sistema é estável em malha fechada?
- 2) Projete um controlador PI para o processo do exercício 1 que garanta margem de fase de 30° e margem de ganho maior do que 2.

Capítulo 6 Resposta em frequência

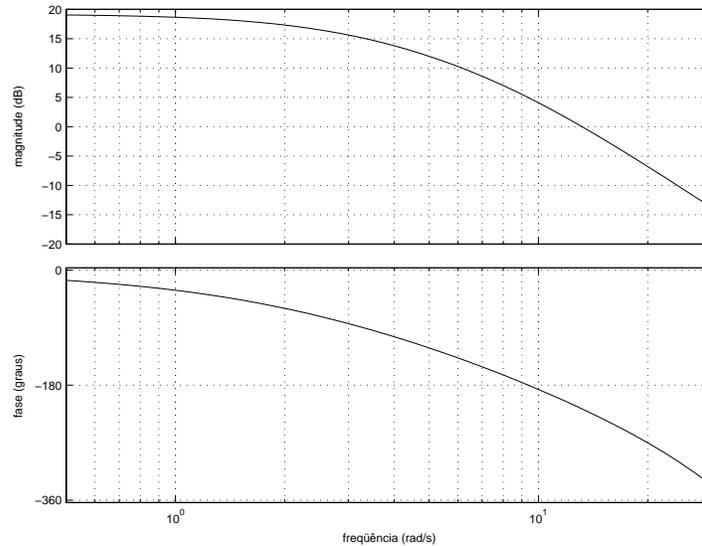


Figura 6.32 - Diagrama de Bode de $G(s)$

- 3) O controlador PI projetado no exercício anterior é implementado remotamente ao processo em uma rede. Devido à distância física entre o controlador e o processo, existe um atraso, de valor desconhecido, na transmissão dos dados do sensor para o controlador e do controlador para o atuador.
 - a) Qual o máximo tempo que os dados podem levar para ir e voltar sem que o sistema de controle se torne instável?
 - b) Ajuste um PID para que um atraso de 100 ms na transmissão dos dados seja tolerado, mantendo a estabilidade do sistema de controle.
- 4) Considere o processo modelado pela seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{e^{-5s}}{(10s + 1)(60s + 1)}$$

- a) Considerando-se um controlador proporcional $C(s) = K$, qual será o máximo valor de ganho K que poderá ser utilizado, sem levar o sistema à instabilidade?
- b) Projete um controlador $C(s)$, de forma que o sistema em malha fechada siga referências constantes com erro nulo em regime permanente, apresente margem de fase maior que 50° e frequência de cruzamento de ganho exatamente igual a $0,13 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.
- c) Supondo o controlador projetado no item anterior, qual será a variação percentual na margem de fase se o atraso de transporte aumentar em 10%?
- 5) Considere novamente o processo cuja resposta em frequência é apresentada na Figura 6.32.
- a) Esboce a resposta do processo ao aplicarmos em sua entrada $u(t)$ um sinal constante de amplitude 2.
- b) Supondo $C(s) = 10$, quanto valerão $y(t)$ e $u(t)$ em regime permanente, considerando-se uma referência constante igual a 2.
- c) Projete um controlador $C(s)$, o mais simples possível, tal que o sistema rejeite assintoticamente perturbações do tipo salto, siga referências do tipo salto com erro nulo em regime permanente, apresente margem de fase maior que 40° e margem de ganho maior que 10 dB.
- 6) Considere o processo cuja função de transferência é dada por:

$$G(s) = \frac{500}{(s+2)(s+10)}$$

- a) Projete $C(s)$, o mais simples possível, de forma que o sistema em malha fechada rejeite assintoticamente perturbações do tipo salto, apresente margem de fase maior que 40° e frequência de cruzamento de ganho exatamente igual a $10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

Capítulo 6 Resposta em frequência

- b) Projete $C(s)$ de forma que o sistema em malha fechada satisfaça: seguimento de referências constantes com erro nulo em regime permanente, apresente margem de fase de aproximadamente 45° e frequência de cruzamento de ganho maior que $30 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

Capítulo 7

Aspectos não-lineares

7.1 Introdução

Um sistema dinâmico pode ser descrito matematicamente por uma equação diferencial da forma:

$$f\left(y(t), \frac{dy(t)}{dt}, \dots, \frac{d^n y(t)}{dt^n}\right) = g\left(x(t), \dots, \frac{d^m x(t)}{dt^m}\right) \quad (7.1)$$

Quando as relações $f(\cdot)$ e $g(\cdot)$ são funções lineares de suas incógnitas, a equação diferencial é linear. Sistemas descritos por equações diferenciais lineares são chamados de *sistemas lineares*. Quando, além disso, os coeficientes que aparecem nas funções $f(\cdot)$ e $g(\cdot)$ não dependem do tempo t , o sistema é dito *linear e invariante no tempo* (LIT). Uma equação diferencial linear a coeficientes constantes pode ser transformada, por meio da transformada de Laplace, em uma função de transferência e o sistema pode ser analisado pelos métodos clássicos, como visto nos capítulos anteriores.

Por outro lado, em muitos sistemas de controle existem elementos que dão origem a relações $f(\cdot)$ e $g(\cdot)$ que não são desta forma. A presença desses elementos não-lineares em um sistema de controle pode gerar efeitos não previstos pela análise linear apresentada até aqui. O objetivo deste capítulo é identificar esses efeitos, arrolar aqueles mais comumente encontrados e apresentar métodos para sua compensação - minimização ou mesmo eliminação - quando estes efeitos são prejudiciais ao desempenho do sistema de controle.

7.2 Comportamento não-linear

7.2.1 Não-linearidades suaves e duras

É conveniente classificar os elementos não-lineares em dois tipos, a partir das funções $f(\cdot)$ e $g(\cdot)$ que os descrevem, como ilustrado na Figura 7.1:

- não-linearidades suaves - são aquelas em que a função é derivável;
- não-linearidades duras - caso contrário.

A Figura 7.1 apresenta um exemplo de não-linearidade dura e uma suave.

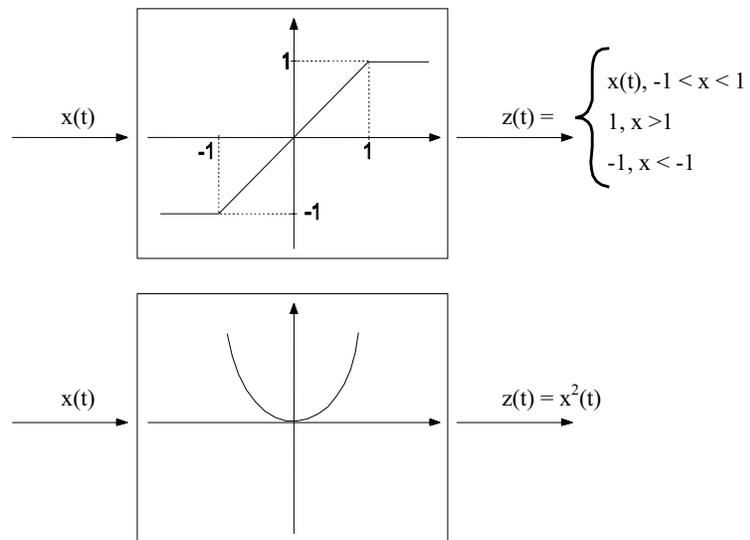


Figura 7.1 - Relações não-lineares: uma função não-linear dura e uma função não-linear suave

Para sistemas contendo somente elementos não-lineares de tipo suave é possível determinar uma aproximação linear para seu comportamento, como visto no Capítulo 4. Para as não-linearidades duras, isto não é possível, já que o procedimento envolve o cálculo da derivada,

que não existe. Assim, o efeito de funções duras sobre o desempenho de um sistema de controle muitas vezes é mais relevante.

O comportamento não-linear em um sistema de controle pode se originar em qualquer das suas partes constituintes: processo, atuador ou sensor. Grande parte dos processos apresenta, dentro de sua faixa normal de operação, apenas elementos não-lineares suaves, de forma que seu comportamento pode ser aproximado por um modelo linear. Esse é o caso dos processos dados como exemplo no Capítulo 4.¹⁵

Já os atuadores e sensores, em geral, são elementos não-lineares, e muitas vezes estas não-linearidades são duras. Uma não-linearidade dura que está presente em todo e qualquer sistema de controle é a saturação do atuador. Por sua importância, essa é analisada em uma seção à parte neste capítulo. Outros exemplos comuns de características não-lineares são:

- folga em atuadores mecânicos;
- folga em tacômetros;
- quantização em *encoders*.

7.2.2 Efeitos não-lineares

As relações não-lineares fazem surgir comportamento qualitativamente distinto daquele observado em sistemas lineares. Os principais efeitos da presença de elementos não-lineares sobre o comportamento de um sistema podem ser observados no próximo exemplo.

Exemplo 7.1 Considere um pêndulo, como descrito na Figura 7.2, em que a entrada do processo é o torque aplicado pelo motor e a saída é a posição angular do pêndulo. O motor aplica um torque ao eixo do braço do pêndulo a fim de levá-lo a uma posição especificada. Este sistema representa um braço de robô e é o modelo básico para estudos dinâmicos e projeto de controladores em robótica.

¹⁵Verifique que os modelos obtidos para esses processos no Capítulo 4 podem ser escritos na forma da equação (7.1) com funções $f(\cdot)$ e $g(\cdot)$ suaves.

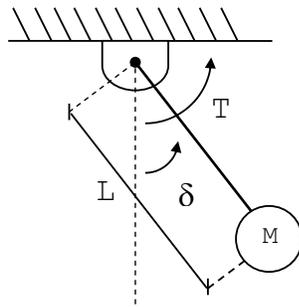


Figura 7.2 - O pêndulo - modelo de uma junta de braço de robô

Esse processo pode ser descrito pela seguinte equação diferencial ordinária a coeficientes constantes:

$$\frac{ML^2}{2}\ddot{y}(t) + B\dot{y}(t) + MgL\text{sen}(y(t)) = u(t)$$

onde M é a massa do pêndulo, L é seu comprimento e B é o coeficiente de atrito do eixo com o mancal sobre o qual ele está apoiado; $u(t)$ é o torque aplicado pelo motor - a entrada do processo - e $y(t)$ é a posição angular do pêndulo com relação à vertical - a saída do processo. Note que esta equação *não* é linear, pois contém a função $\text{sen}(y(t))$.

Suponha que se deseja colocar o pêndulo na posição $y_0 = 30^\circ$ e ali mantê-lo em posição constante. Esta condição de saída, assim como qualquer outra, deve satisfazer a equação diferencial que descreve o sistema. Logo, para que a posição do pêndulo seja constante, será necessário aplicar um torque constante $u(t) = T_0$ cujo valor satisfaça $T_0 = MgL\text{sen}(y_0) = \frac{M \cdot g \cdot L}{2}$. Porém, $\text{sen}(120^\circ) = \text{sen}(30^\circ)$ e, portanto, se esse torque for aplicado ao pêndulo, na posição $y = 120^\circ$ o somatório dos torques sobre o pêndulo (o torque aplicado pelo motor mais o torque causado pela ação da gravidade) também seria nulo e o pêndulo poderia ficar em equilíbrio na posição $y = 120^\circ$. Assim, quando o torque aplicado ao pêndulo for constante, existe mais de uma posição possível de equilíbrio para o pêndulo. Este comportamento - múltiplos

Capítulo 7 Aspectos não-lineares

equilíbrios - é causado pela característica não-linear deste sistema.

Ao ser aplicado um torque constante o pêndulo deverá, após um período transitório, acomodar-se em uma posição de equilíbrio; é o que pode ser visto na Figura 7.3, onde é apresentada a resposta do pêndulo a um torque a partir de uma condição inicial em que o pêndulo se encontrava parado na posição vertical. Porém, se o comportamento do sistema para diferentes condições iniciais é analisado, observa-se que, para condições iniciais muito distantes desta condição de equilíbrio, o comportamento do sistema pode mudar qualitativamente. Na Figura 7.4 é apresentado o comportamento do pêndulo a partir da posição de -57° , onde já se pode observar um comportamento levemente distinto daquele observado na Figura 7.3 (note a maior duração da primeira oscilação). Para condições iniciais suficientemente distantes do equilíbrio, o sistema nunca atinge este equilíbrio, como mostrado na Figura 7.5. O conjunto de condições iniciais para as quais o sistema volta a atingir o equilíbrio, após um período transitório, é chamado de *região de atração* do equilíbrio. Esse conjunto de condições iniciais é, em geral, limitado, como neste exemplo. Já para um sistema linear, a região de atração de um equilíbrio é sempre ilimitada.

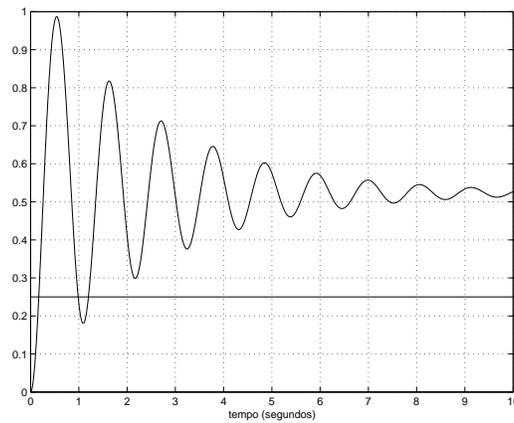


Figura 7.3 - O pêndulo se acomodando sob um torque constante a partir da posição vertical

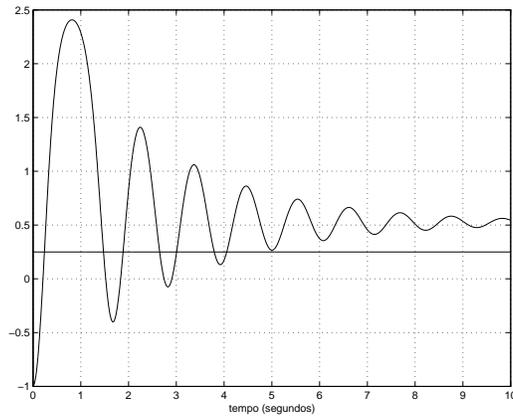


Figura 7.4 - O pêndulo se acomodando sob um torque constante a partir da posição inicial de -57°

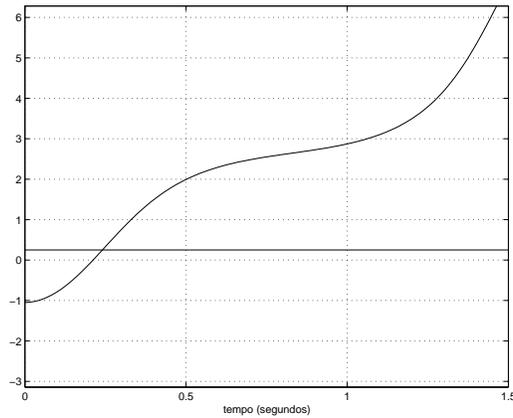


Figura 7.5 - A posição do pêndulo divergindo sob um torque constante a partir da posição inicial de -60°

Capítulo 7 Aspectos não-lineares

Suponha agora que o torque aplicado ao pêndulo seja uma senóide. Quando um sinal senoidal é aplicado a um sistema linear, a saída em regime permanente será também uma senóide, com a mesma frequência do sinal de entrada. A Figura 7.6 apresenta a resposta do pêndulo quando um torque senoidal é aplicado ao seu eixo. Nota-se que a saída não é uma senóide, e uma análise harmônica deste sinal revela a existência de componentes significativos da frequência fundamental e da terceira e quinta harmônicas.

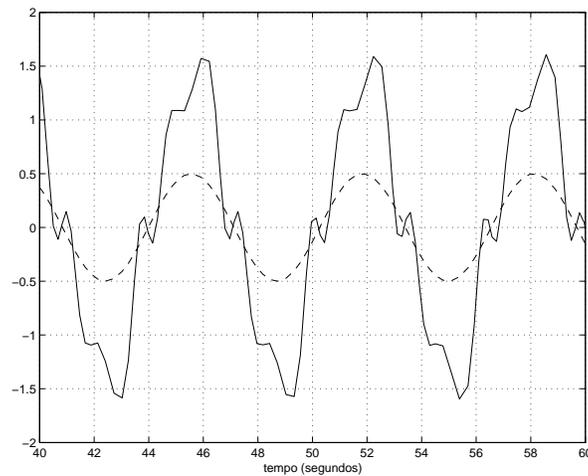


Figura 7.6 - O pêndulo acionado por um torque senoidal - torque de entrada (linha tracejada) e posição do pêndulo (linha cheia)

O exemplo anterior ilustra alguns dos principais efeitos de elementos não-lineares em sistemas de controle:

- multiplicidade de equilíbrios;
- harmônicas de frequência;
- diferentes magnitudes dos sinais de entrada e das condições iniciais resultam em comportamento qualitativamente distinto.

Outros efeitos não-lineares surgem de um tipo particular de função não-linear que está presente em todos os sistemas de controle - a saturação - e que por essa razão são apresentados separadamente na próxima seção.

7.3 Saturação de atuadores

O problema de restrições sobre a amplitude do sinal de controle se faz presente em todos os sistemas de controle industriais. Devido a limitações físicas, tecnológicas ou mesmo por motivos de segurança, os atuadores não são capazes de fornecer sinais de amplitude ilimitada aos processos a serem controlados. Alguns exemplos disso estão listados a seguir.

- Válvulas proporcionais - permitem uma vazão máxima (quando estão completamente abertas) ou uma vazão igual a zero (quando estão completamente fechadas). Note que é impossível existirem sinais de controle com valor negativo nesse caso (corresponderia a existir uma vazão negativa).
- Atuadores de aquecimento e/ou resfriamento - existe sempre uma potência térmica máxima que pode ser fornecida ou retirada. Muitas vezes a atuação se dá apenas em um sentido, ou seja, só é possível fornecer calor (um forno, por exemplo) ou retirar calor (uma câmara frigorífica, por exemplo). Nesse caso teremos um limite máximo (de aquecimento ou resfriamento) e o limite mínimo será zero, não sendo possível aplicar sinais de controle de amplitude negativa.
- Amplificadores eletrônicos - a tensão máxima e mínima que pode ser obtida na saída de um amplificador eletrônico está vinculada às tensões de alimentação do mesmo.
- Circuitos de acionamento de motores - não podem fornecer níveis de tensão e corrente acima dos quais foram projetados para operar.

Capítulo 7 Aspectos não-lineares

Essas limitações são modeladas como um bloco de saturação no sistema em malha fechada conforme apresentado na Figura 7.7. Quando o atuador satura, o sistema se comporta como se o laço de realimentação fosse interrompido. Independentemente da evolução da saída, o sinal de controle aplicado ao processo manter-se-á constante no valor de saturação. O sistema passa assim, enquanto o atuador estiver saturado, a se comportar como se estivesse em malha aberta (sinal de controle fixo aplicado na entrada do processo). Esse comportamento não-linear pode provocar uma degradação significativa no desempenho do sistema. Tal degradação pode ser sentida tanto em regime permanente, com a perda do seguimento de referências ou a não rejeição assintótica de perturbações constantes, mesmo quando a malha de controle possui integradores em posições adequadas, quanto na resposta transitória, com o sistema apresentando tempos de estabilização e sobrepassos maiores. Esses dois problemas são discutidos a seguir.

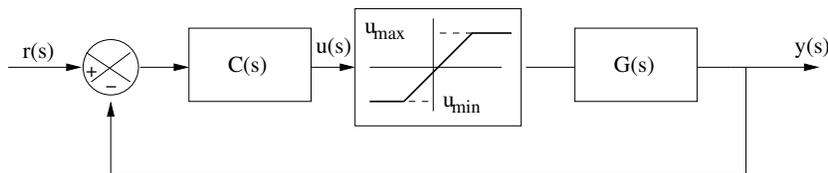


Figura 7.7 - Sistema de controle com saturação

7.3.1 Degradação do desempenho em regime permanente

Conforme discutido nos capítulos anteriores, para fazer a saída de um processo do tipo 0 seguir uma referência constante r com erro nulo em regime permanente, deve-se ter no controlador uma ação integral. Considere o sistema da Figura 7.8. Suponha que o processo ($G(s)$) a controlar seja do tipo 0 e que o mesmo seja controlado por um controlador com ação integral, projetado de forma que o sistema em malha fechada seja estável. Considere inicialmente o caso sem perturbação ($q(t) = 0$). Assim, no caso em que não haja limites sobre a amplitude do sinal de controle $u(t)$, ao aplicar-se uma referência constante (salto)

$r(t) = r$, em regime permanente ocorrerá o seguinte:

- o sinal $e(\infty)$ será nulo e a saída $y(\infty)$ terá valor r ;
- para que $y(\infty) = r$, o sinal de controle $u(\infty)$ assumirá o valor:

$$u(\infty) = \frac{r}{G(0)}$$

ou seja, o valor da referência dividido pelo ganho estático do processo; note que o sinal de controle em regime permanente é dado exclusivamente pelo termo integral, isto é, $u(\infty) = i(\infty)$.

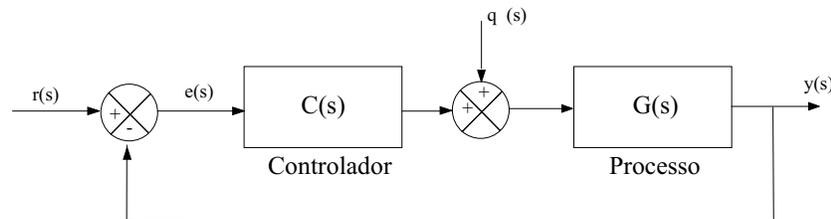


Figura 7.8 - Sistema de controle com perturbação

Considerando agora a existência de uma perturbação ($q(t) \neq 0$), a ação integral no controlador garantirá que a mesma será assintoticamente rejeitada em regime permanente. O compensador, através da ação integral, é responsável por contrabalançar o efeito da perturbação, a fim de que o valor de $y(t)$ em regime permanente seja exatamente igual ao valor da referência. Para isso devemos ter satisfeita a seguinte equação:

$$u(\infty) + q(\infty) = \frac{r}{G(0)}$$

Suponha agora que exista um limite máximo (u_{max}) e um mínimo (u_{min}) para $u(t)$. Essa limitação é modelada na malha de controle através de um bloco de saturação conforme mostrado na Figura 7.7. Se o valor da referência r for excessivamente grande, o valor de $u(\infty)$ que seria necessário para que $y(\infty)$ assumisse o valor r poderá ser maior

Capítulo 7 Aspectos não-lineares

que o valor máximo que é possível aplicar ao processo (u_{max}). Quando isso ocorre, a saída do processo ficará limitada ao valor $u_{max} \cdot G(0) < r$ e haverá um erro em regime permanente, mesmo havendo um integrador na malha.

Na ausência de perturbações ($q(t) = 0$), é possível então determinar os valores máximo (r_{max}) e mínimo (r_{min}) de referências constantes que podem ser seguidas com erro nulo em presença de atuadores saturantes:

$$r_{max} = u_{max} \cdot G(0)$$

$$r_{min} = u_{min} \cdot G(0)$$

Seguindo o mesmo raciocínio, dada uma referência fixa, pode-se determinar o máximo ou o mínimo valor de perturbação possível de ser rejeitada em regime permanente através da seguinte equação:

$$q_{min} = \frac{r}{G(0)} - u_{max}$$

$$q_{max} = \frac{r}{G(0)} - u_{min}$$

O exemplo a seguir ilustra o que foi discutido.

Exemplo 7.2 Considere o processo e o controlador do exemplo 5.5, dados por

$$G(s) = \frac{1,8}{(s+0,1)} \quad C(s) = 6,67\left(1 + \frac{2}{s}\right)$$

e suponha que a saída de controle apresente os seguintes limites máximo e mínimo: $u_{min} = -100$, $u_{max} = 50$.

Na ausência de perturbações, podemos concluir que a máxima e a mínima referência que podem ser seguidas pelo sistema são:

$$r_{max} = u_{max} \cdot G(0) = 50 \times 18 = 900$$

$$r_{min} = u_{min} \cdot G(0) = -100 \times 18 = -1800$$

Os gráficos das Figuras 7.9, 7.10 e 7.11 mostram o que ocorre respectivamente com a saída, o sinal de controle e o termo integral quando

aplica-se um salto de variação de 100 rpm na referência. Mesmo ocorrendo a saturação do sinal de controle por alguns instantes, a saída converge para o valor da referência em regime permanente, pois $100 < r_{max}$. Observe que o valor do sinal de controle em regime permanente é igual ao do termo integral, sendo igual a $100/18 = 5,56$. Por outro lado, é importante observar que, devido à ocorrência da saturação, o desempenho transitório é degradado em relação ao obtido no exemplo 5.5 sem considerar os limites de controle.

A mínima e a máxima perturbação de carga que poderão ser assintoticamente rejeitadas serão respectivamente iguais a:

$$q_{min} = \frac{r}{G(0)} - u_{max} = \frac{100}{18} - 50 = -44,44$$

$$q_{max} = \frac{r}{G(0)} - u_{min} = \frac{100}{18} + 100 = 105,56$$

Considere agora que um salto de variação de referência de 1000 rpm (superior a r_{max}) seja aplicado. Como pode ser observado na Figura 7.12, haverá um erro de seguimento em regime permanente. O sinal de controle, conforme mostrado na Figura 7.13, está permanentemente saturado, ou seja, o sistema opera como se fosse em malha aberta com um sinal constante igual a 50 aplicado todo o tempo sobre o processo. Por outro lado, como o erro em regime é diferente de zero, este continuará sendo integrado, o que levará a uma divergência do sinal correspondente ao termo integral. Este fenômeno pode ser observado na Figura 7.14.

Capítulo 7 Aspectos não-lineares

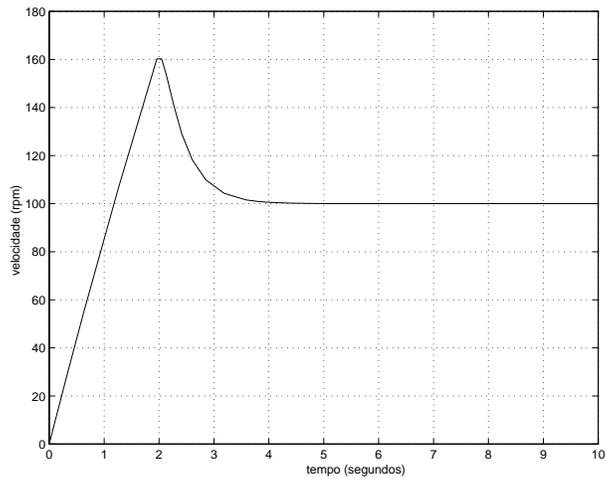


Figura 7.9 - Sinal de saída - caso $r < r_{max}$

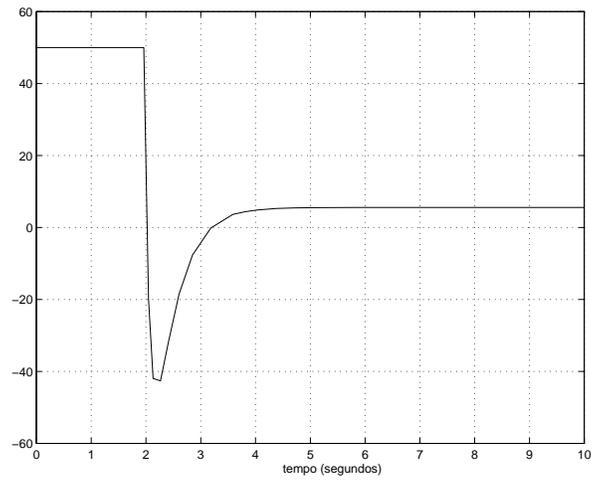


Figura 7.10 - Sinal de controle - caso $r < r_{max}$

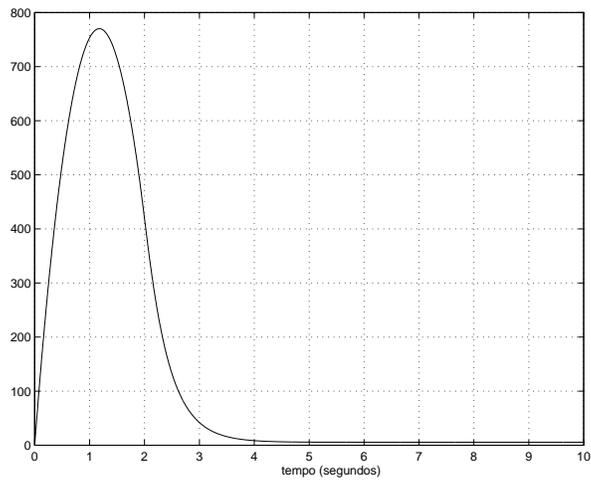


Figura 7.11 - Termo integral - caso $r < r_{max}$

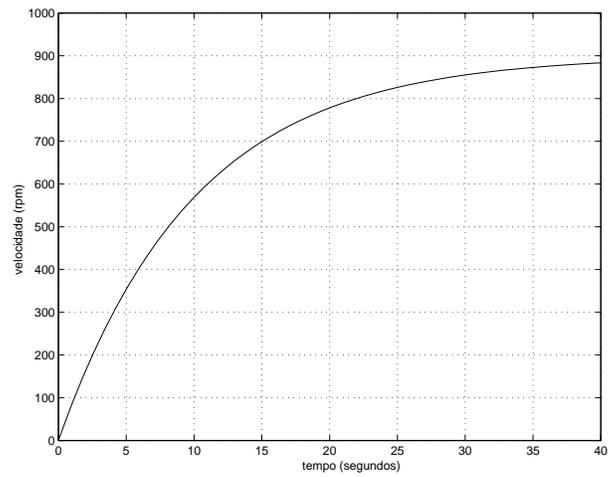


Figura 7.12 - Sinal de saída - caso $r > r_{max}$

Capítulo 7 Aspectos não-lineares

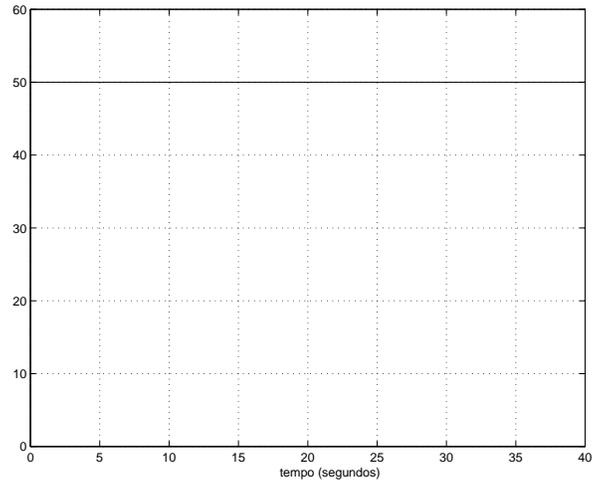


Figura 7.13 - Sinal de controle - caso $r > r_{max}$

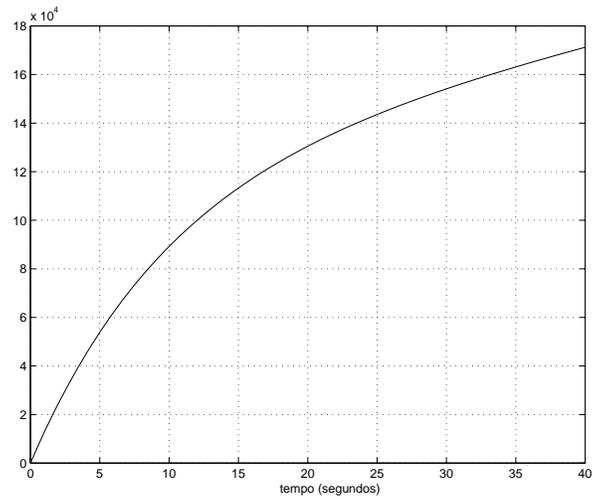


Figura 7.14 - Termo integral - caso $r > r_{max}$

7.3.2 *Wind-up* da ação integral

Conforme discutido anteriormente, na prática todos os atuadores apresentam limites. Quando o valor da variável de controle atinge o limite máximo (ou mínimo) do atuador, ocorre a saturação do sinal de controle. Esse fato faz com que o atuador permaneça no seu limite máximo (ou mínimo) durante um certo tempo, independentemente da saída do processo. Entretanto, se um controlador com ação integral é utilizado, o erro continuará a ser integrado e o termo integral tende a se tornar muito grande, ou seja, tende a carregar-se demasiadamente. Do inglês, diz-se que o termo integral *winds-up*. Para que o controlador volte a operar na região linear (saia da saturação) é necessário que o termo integral se descarregue. Para tanto é necessário que o sinal de erro troque de sinal e, por um período de tempo que pode vir a ser longo, seja aplicado à entrada do controlador. A consequência disso é que a resposta transitória do sistema tenderá a ficar lenta e oscilatória, característica esta extremamente indesejável em um processo industrial.

Existem várias maneiras de se evitar o *wind-up* da ação integral. A seguir apresentaremos dois métodos de *anti-wind-up*. A idéia básica é impedir que o integrador continue a se carregar quando a saturação ocorre.

7.3.2.1 Integração condicional

A maneira mais simples de reduzir os efeitos de *wind-up* da ação integral consiste em inibir temporariamente a integração. A ação integral é assim ativada apenas quando certas condições preestabelecidas são satisfeitas, caso contrário o termo integral é mantido constante, ou seja, a entrada do integrador é mantida em zero.

As condições para a integração ser inibida podem ser definidas de várias maneiras. Uma forma consiste em desativar a integração enquanto o sinal de erro $e(t)$ for grande, evitando carregar o integrador enquanto a saída estiver longe do valor de referência. Outra maneira consiste em desativar o integrador somente enquanto o sinal de controle estiver saturado. A desvantagem dessas duas estratégias é que

o valor do termo integral poderá ficar bloqueado em um valor muito alto enquanto o integrador permanecer desligado. Nesse caso, o efeito de minimização da degradação do desempenho transitório pode ficar aquém do satisfatório.

Para evitarmos esse tipo de problema, uma estratégia alternativa de integração condicional pode ser implementada. A idéia consiste em inibir a integração somente quando *o controlador está saturado e o erro $e(t)$ é tal que provocaria um aumento da carga do integrador fazendo com que o sinal de controle ficasse mais saturado*. Assim, por exemplo, se o sinal de controle satura no limite máximo positivo, a ação integral seria inibida enquanto o sinal de erro fosse positivo. Observe que, enquanto o erro é positivo, o termo integral tenderia a aumentar seu valor e isto não teria nenhum efeito sobre o sinal de controle, pois o mesmo já se encontra em seu limite máximo. Por outro lado, quando o sinal de erro se tornar negativo, o integrador tenderia a se descarregar e diminuir o valor do sinal de controle e, portanto, a tendência será de fazer com que o sinal de controle saia da situação de saturação; a integração seria então autorizada. O pseudocódigo a seguir ilustra como esta estratégia de integração condicional poderia ser facilmente implementada em um sistema de controle digital.

```
if ((u <= u_max & u >= u_min) or (u < u_min & e > 0) or
    (u > u_max & e < 0))
    i=i_ant+(erro-erro_ant)*T_s/2
else
    i=i_ant
end
```

Laço de *anti-wind-up*

Uma técnica de *anti-wind-up* um pouco mais sofisticada consiste na atualização dinâmica do valor do termo integral quando ocorre saturação do sinal de controle. Essa atualização dinâmica é obtida pela introdução no controlador de um laço extra de realimentação, chamado de laço de *anti-wind-up*,¹⁶ conforme mostrado na Figura 7.15. A diferença entre o valor da entrada e da saída do atuador constituem

¹⁶Na literatura de língua inglesa essa estratégia é chamada de *back calculation and tracking*.

um erro e_s que é realimentado à entrada do integrador com um ganho $1/T_t$. Note que quando não há saturação, o erro e_s é igual a zero e, portanto, este laço não tem nenhum efeito quando o controlador está operando linearmente, ou seja, quando sua saída não está saturada.

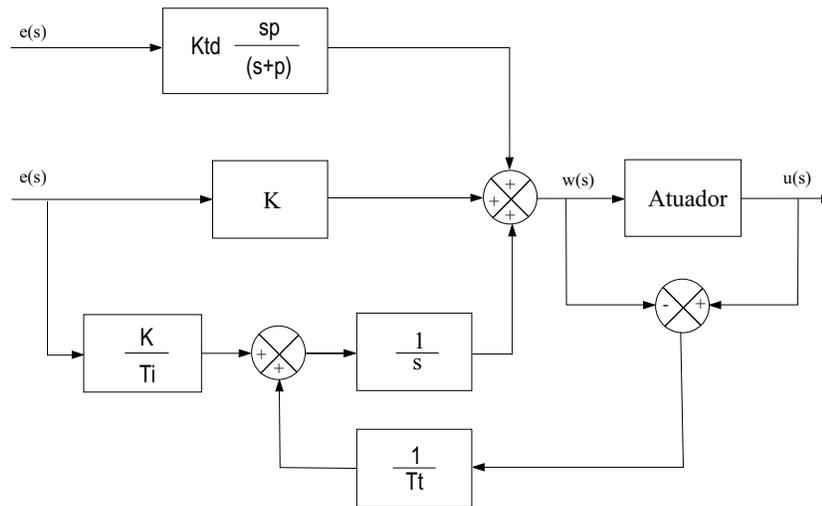


Figura 7.15 - Controlador PID com laço de *anti-wind-up*

Quando ocorre a saturação, e_s será diferente de zero e o sinal aplicado na entrada do integrador não mais será eK/T_i , mas

$$\frac{1}{T_t}e_s + \frac{K}{T_i}e$$

Observe que a idéia do laço de *anti-wind-up* é fazer com que a diferença entre o sinal fornecido ao atuador e a sua saída (sinal de controle efetivo) seja levada a zero. Quando o sinal de controle satura, a diferença entre $w(t)$ e $u(t)$ faz com que o valor do termo integral se corrija automaticamente a fim de manter $w(t)$ no limiar da saturação e, portanto, evitando que o integrador se carregue em demasia.

O tempo associado à correção automática do valor do termo integral é determinado pelo ganho $1/T_t$. Note que a função de transferência

entre $u(t)$ e $w(t)$ é dada por:

$$\frac{u(s)}{w(s)} = \frac{1}{T_t s + 1}$$

ou seja, T_t corresponde à constante de tempo do laço de compensação. À primeira vista pode parecer vantajosa a escolha de valores extremamente pequenos para T_t , pois isso levaria a uma correção do valor do termo integral de forma extremamente rápida. Entretanto, um valor muito pequeno para esta constante torna o sistema mais sensível a ruído. Então o controlador pode ser levado à saturação pelo ruído, acionando assim a malha de *anti-wind-up* quando isto não deveria ocorrer. Portanto, é necessário escolher criteriosamente o valor de T_t , particularmente em sistemas com ação derivativa. Na prática deve-se ter T_t maior que T_d e menor que T_i . Uma regra empírica sugerida e largamente adotada é a escolha de:

$$T_t = \sqrt{T_i T_d}$$

Exemplo 7.3 Considere o mesmo sistema do exemplo 7.2. As Figuras 7.16, 7.17 e 7.18 mostram respectivamente os sinais de saída, controle e termo integral quando há uma variação de referência de 100 rpm em dois casos: sem laço de *anti-wind-up* (curvas em traço pontilhado) e com laço de *anti-wind-up* com $T_t = 0,5$ (curvas em traço contínuo).

Observe que, com o laço de *anti-wind-up*, o sobrepasso é drasticamente reduzido e o tempo de estabilização cai praticamente à metade. Isso se deve ao fato de que o laço de compensação evita que o termo integral se carregue em excesso, como pode ser observado na Figura 7.18. Note também que o tempo durante o qual o sinal de controle permanece saturado é reduzido.

7.4 Compensação de efeitos não-lineares

Até o presente momento, nos métodos de análise e projeto apresentados, assumiu-se que os sensores e atuadores tinham características lineares.

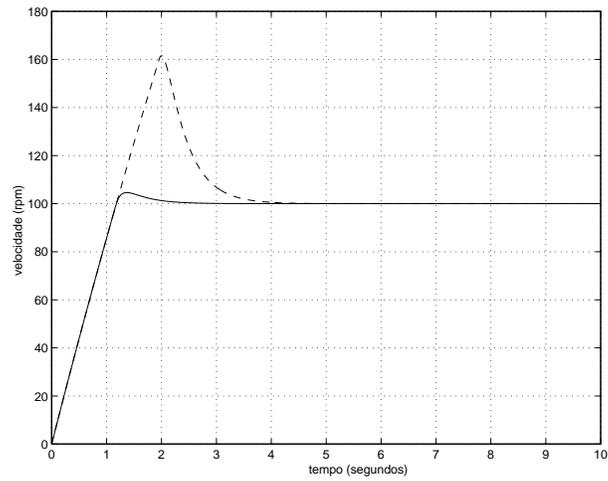


Figura 7.16 - Sinal de saída do processo com e sem *anti-wind-up*

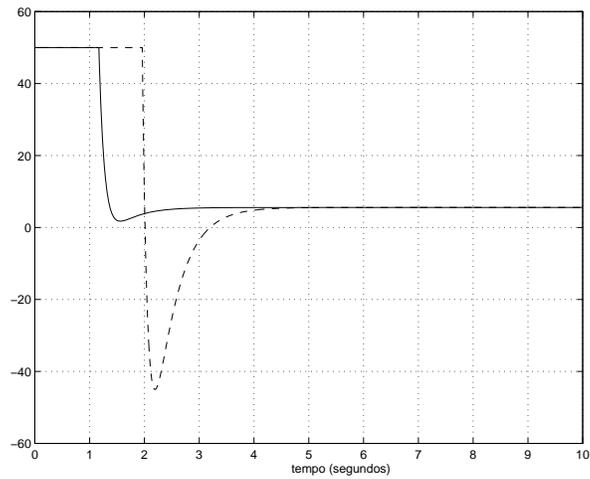


Figura 7.17 - Sinal de controle com e sem *anti-wind-up*

Capítulo 7 Aspectos não-lineares

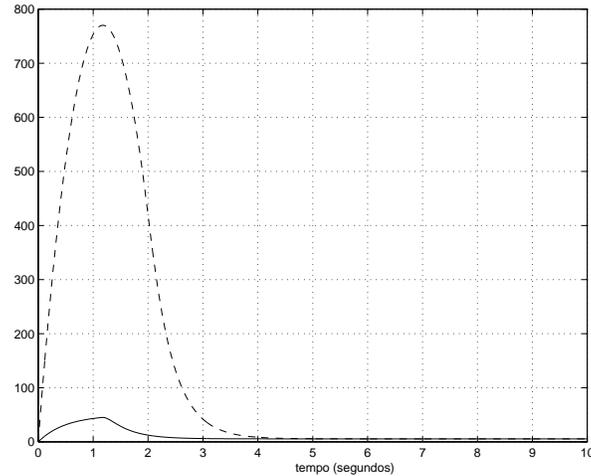


Figura 7.18 - Termo integral - caso $r > r_{max}$

- Considerando $v(t)$ a entrada do atuador (sinal proveniente do controlador) e $u(t)$ sua saída (sinal que será efetivamente aplicado ao processo) assume-se que:

$$u(t) = K_{at}v(t)$$

onde K_{at} seria o ganho propiciado pelo atuador. Para fins de análise, esse ganho pode ser incorporado ao processo e, sem perda de generalidade, pode-se considerar $K_{at} = 1$.

- Considerando $y(t)$ a entrada do sensor (sinal físico de saída do processo) e $z(t)$ sua saída (sinal que será comparado com a referência) assume-se que:

$$z(t) = K_{se}y(t)$$

onde K_{se} é a constante de proporcionalidade do sinal de saída do sensor. A partir do discutido na seção 1.3.2, para fins de análise, pode-se considerar $K_{se} = 1$.

Entretanto, em muitos casos, esta linearidade não é verificada, ou seja:

$$u(t) = f_{at}(v(t))$$

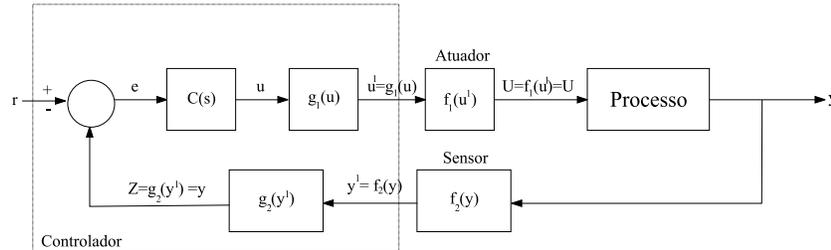


Figura 7.19 - Cancelamento de não-linearidades no sensor e no atuador: as funções inversas são incluídas no controlador

$$z(t) = f_{se}(y(t))$$

onde $f_{at}(v(t))$ e $f_{se}(y(t))$ são funções não-lineares. Nesses casos o comportamento do sistema deixa de ser linear. Portanto, deixa de ser válida a análise de seu comportamento feita com base nas funções de transferência envolvidas na malha de controle, tanto em regime transitório quanto em regime permanente. Assim, quando a resposta dos sensores e/ou atuadores não é linear (ou aproximadamente linear) é importante a busca de soluções que permitam diminuir ou eliminar o efeito destas não-linearidades introduzidas na malha de controle.

7.4.1 Inversão de não-linearidades

Este método consiste em introduzir na malha de controle um dispositivo que implemente a *função inversa* da não-linearidade. Por razões construtivas, a função inversa da não-linearidade deve ser implementada antes do atuador e após o sensor, podendo, em ambos os casos, ser incorporada fisicamente ao controlador, como ilustrado na Figura 7.19. Assim, do ponto de vista entrada-saída, o bloco formado pelo atuador/sensor e o dispositivo que implementa a função inversa será visto pelo resto da malha como um bloco de ganho unitário. Diz-se então que a não-linearidade foi cancelada.

Exemplo 7.4 Seja um sensor cuja relação entre a grandeza física a ser medida e sua saída é dada pela seguinte função:

$$y' = f(y) = \begin{cases} y^2 & \text{se } y \geq 0 \\ -y^2 & \text{se } y < 0 \end{cases}$$

O dispositivo cancelador da não-linearidade deverá então executar a seguinte função:

$$z = g(y') = \begin{cases} \sqrt{y'} & \text{se } y' \geq 0 \\ -\sqrt{-y'} & \text{se } y' < 0 \end{cases}$$

Observe que $g(\cdot) = f^{-1}(\cdot)$. A função inversa nesse caso pode ser implementada fisicamente por um amplificador extrator de raiz quadrada.

Exemplo 7.5 Em acionamentos de cargas a partir de circuitos tiristorizados, quanto maior o ângulo de disparo do tiristor, menor a potência aplicada sobre a carga. A relação entre o ângulo de disparo e a potência fornecida pode ser aproximadamente descrita pela função:

$$P \approx f(\alpha) = -\frac{P_{max}}{180}\alpha + P_{max}$$

onde α é o ângulo de disparo dado em graus e P é a potência aplicada sobre a carga.

Quando o sinal proveniente do controlador for zero, o desejável seria que fosse aplicada potência zero sobre a carga. Entretanto, devido à característica da função $f(\alpha)$, se usarmos o sinal do controlador diretamente como sinal de ângulo de fase um sinal de controle igual a zero teremos a potência máxima. Para corrigir este problema, pode-se introduzir um dispositivo cancelador da não-linearidade que implemente a seguinte função:

$$\alpha = -\frac{180}{P_{max}}u + 180$$

onde u denota o sinal de saída do controlador. Note que dessa forma tem-se $P = f(\alpha) = f(-\frac{180}{P_{max}}u + 180) = u$, conforme desejado. O dispositivo cancelador pode ser implementado analogicamente como um amplificador inversor de ganho $\frac{180}{P_{max}}$ com um *offset* de 180.

Cabe ressaltar que nem todas as não-linearidades possuem inversa. Este é o caso, por exemplo, da saturação e da histerese.

7.4.2 Linearização por partes

Nem sempre a não-linearidade do sensor ou do atuador pode ser descrita por uma lei de formação bem definida como nos casos dos exemplos 7.4 e 7.5. Muitas vezes a resposta do sensor/atuador é obtida experimentalmente, o que leva à disponibilização de um conjunto de pontos ou uma curva. Nesse caso, pode-se proceder ao que se chama de linearização por partes. A idéia do método consiste em aproximar partes da curva em questão por retas (funções afins) e, então, determinar a função inversa para cada uma das partes.

A linearização por partes pode ser implementada analogicamente por amplificadores de ganho variável, ou seja, amplificadores que variam o ganho dependendo da amplitude do valor de sua entrada. Muitos controladores PID comerciais apresentam o que se chama de *entradas linearizadas* para diferentes tipos de sensores. Isso significa que o próprio fabricante implementa o cancelamento da não-linearidade dos sensores especificados. O método mais comumente utilizado é o da linearização por partes.

Uma das muitas vantagens dos controladores implementados com tecnologia digital é que a linearização pode ser feita facilmente por *software*.

- Linearização do sensor - a função inversa da não-linearidade é implementada através de uma rotina que tem como entrada o valor fornecido pelo sensor no instante de amostragem e digitalizado pelo conversor A/D. O valor de retorno da rotina será o valor linearizado da variável de saída do processo que será utilizado pela rotina de controle.

Capítulo 7 Aspectos não-lineares

- Linearização do atuador - a função inversa da não-linearidade é implementada através de uma rotina que tem como entrada o valor fornecido pela rotina de controle e como saída o valor linearizado a ser passado ao conversor D/A.

Considere, por exemplo, que a resposta de um sensor, aproximada por uma função linear por partes, é dada pelo gráfico da Figura 7.20, onde se pode indentificar 4 regiões lineares diferentes, sendo que y corresponde à grandeza medida e v corresponde ao sinal dado pelo sensor.

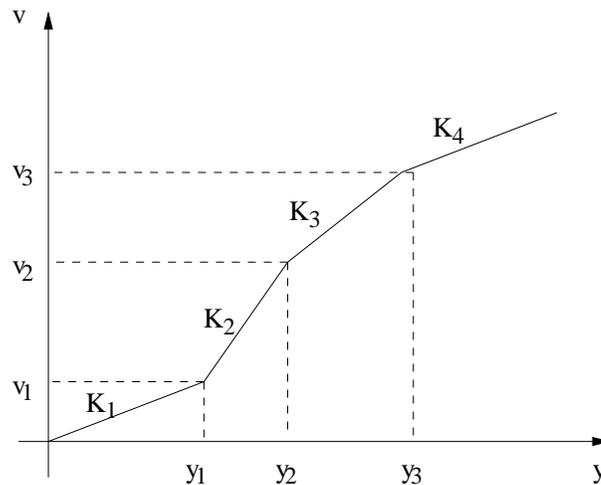


Figura 7.20 - Cancelamento usando linearização por partes

Deseja-se que o sensor forneça ao controlador um sinal:

$$v_{lin}(t) = K_{se}y(t) \quad (7.2)$$

Assim, a fim de que a resposta seja exatamente a dada em (7.2) devemos implementar uma função, definida por partes, como segue:

- Se $0 < v(t) < v_1$ então $v_{lin}(t) = K_{se} \frac{v(t)}{K_1}$
- Se $v_1 \leq v(t) < v_2$ então $v_{lin}(t) = K_{se} \left(\frac{v(t)-v_1}{K_2} + y_1 \right)$

- Se $v_2 \leq v(t) < v_3$ então $v_{lin}(t) = K_{se} \left(\frac{v(t)-v_2}{K_3} + y_2 \right)$
- Se $v_3 \leq v(t)$ então $v_{lin}(t) = K_{se} \left(\frac{v(t)-v_3}{K_4} + y_3 \right)$

O pseudocódigo que implementa esta função de linearização por partes é dado a seguir.

```

v_sensor=leitura(sensor) if (v_sensor>=0 & v_sensor<v_1)
    v_lin=K_se*(v_sensor/k_1)
else if (v_sensor>=v_1 & v_sensor<v_2)
    v_lin=K_se*((v_sensor-v_1)/k_2+y_1)
else if (v_sensor>=v_2 & v_sensor<v_3)
    v_lin=K_se*((v_sensor-v_2)/k_3+y_2)
else if (v_sensor>=v_3)
    v_lin=K_se*((v_sensor-v_3)/k_4+y_3)
end

```

7.5 Zona-morta

A Figura 7.21 ilustra a não-linearidade tipo zona-morta. Essa não-linearidade impede a passagem do sinal de entrada quando este é de pequena magnitude, isto é, de magnitude inferior aos limites da zona-morta, na figura marcados por $d_1 > 0$ e $d_2 < 0$. Considerando $v(t)$ e $u(t)$ respectivamente como os sinais de entrada e saída da zona-morta, tem-se que:

- se $v(t) > d_1$ então $u(t) = v(t) - d_1$;
- se $d_2 < v(t) < d_1$ então $u(t) = 0$;
- se $v(t) < d_2$ então $u(t) = v(t) - d_2$.

No caso em que os limites d_1 e d_2 são iguais ($d_1 = -d_2 = d$) diz-se que a zona-morta é simétrica.

A não-linearidade tipo zona-morta é comum em certos processos industriais, em especial em servomecanismos, como no controle de posição de motores de corrente contínua. Nesse processo, a zona-morta representa o efeito do atrito estático, que impede que o motor se movimente para baixos valores de tensão aplicados na armadura. Note que,

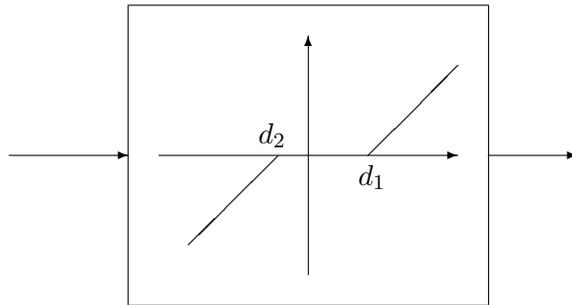


Figura 7.21 - Não-linearidade tipo zona-morta

na maioria dos casos, para que o motor comece a girar é necessário a aplicação de uma tensão mínima em sua armadura.

O efeito da zona-morta sobre o desempenho de sistemas de controle é mais evidente em regime permanente. Como o sistema não reage a pequenos sinais de atuação, acabam resultando erros em regime permanente, prejudicando a precisão do sistema em malha fechada. Esse efeito é notório e bastante indesejável justamente em servomecanismos (controle de posição), onde erros de posição são inadmissíveis. Como visto no Capítulo 4, em sistemas de controle de posição utilizando motores, o processo já apresenta implicitamente um integrador (o processo é do tipo 1) e com isso, estes sistemas não necessitariam, em princípio, da introdução de uma ação integral no controlador para a obtenção de erro nulo em regime permanente a referências constantes. Entretanto, devido à presença de uma zona-morta, será observado um erro em regime permanente. Tal fato é ilustrado no exemplo a seguir.

Exemplo 7.6 Considere um sistema de controle com zona-morta no atuador, onde os limites da zona-morta são dados por $d_1 = -d_2 = 0,2$ e:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)} \quad C(s) = 1$$

Como o próprio processo é do tipo 1 (já possui um integrador), na ausência de não-linearidades no atuador, o controlador proporcional apresentado seria suficiente para garantir seguimento de referências constantes com erro nulo em regime permanente.

A Figura 7.22 mostra a resposta do sistema considerando-se a aplicação de um salto unitário em sua referência. Como pode-se observar nessa figura, a presença da zona-morta provoca um aparecimento de um erro de 0,2. O ocorrido é facilmente compreendido se considerarmos que, como $C(s) = 1$, quando o erro chega a 0,2, o sinal $v(t)$ cai dentro da zona-morta e o sinal de controle aplicado ao processo é igual a zero, fazendo com que a sua saída estabilize em um valor constante menor do que a referência.

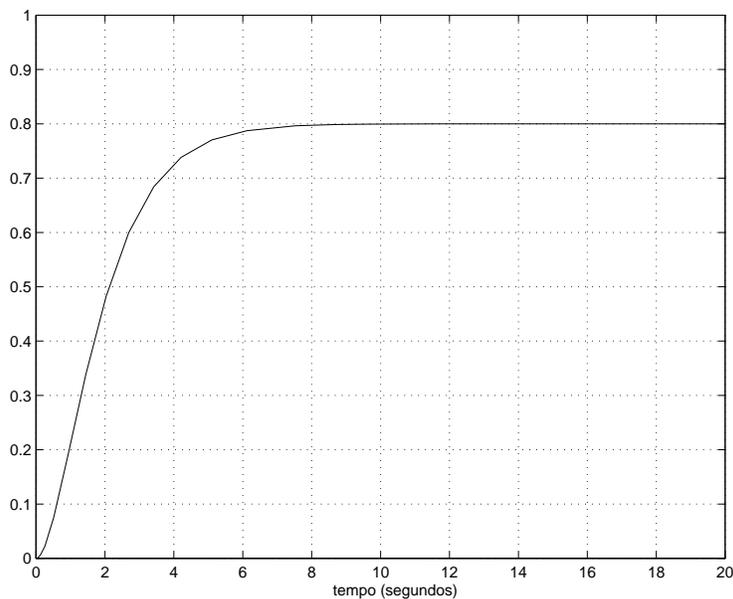


Figura 7.22 - Sinal de saída - erro em regime permanente devido à zona-morta

Como a precisão do sistema em malha fechada é importante, especialmente em controles de posição, torna-se necessário estudar alternativas de controle para compensar o efeito da zona-morta. Na próxima seção serão mostradas duas maneiras de contornar o efeito em regime permanente da zona-morta: compensação através da função inversa e da utilização de uma ação integral.

7.5.1 Compensação através da função inversa

Esta estratégia consiste em pré-compensar a zona-morta através da introdução de um *offset* sobre o sinal proveniente do controlador antes de enviá-lo ao atuador. Considerando $v'(t)$ o sinal a ser enviado ao atuador na ausência de zona-morta, e $v(t)$ o sinal efetivamente enviado ao atuador, essa estratégia é implementada através da seguinte função:

$$\begin{aligned}v(t) &= v'(t) + d_1 \text{ se } v'(t) \geq 0 \\v(t) &= v'(t) + d_2 \text{ se } v'(t) < 0\end{aligned}$$

Dessa forma, $u(t)$ será exatamente igual a $v'(t)$, ou seja, tudo irá se passar como se não existisse a zona-morta. Essa técnica funciona bem se os limites da zona-morta d_1 e d_2 são conhecidos de maneira precisa. Observe que se houver diferença entre os valores usados na função inversa e os valores reais da zona-morta, esta não será exatamente cancelada. Infelizmente, na prática, os limites d_1 e d_2 nem sempre podem ser medidos de maneira acurada. Além disso, é comum que os limites da zona-morta variem com o tempo, o que torna a aplicação desta técnica pouco eficaz. Uma maneira de contornar esse problema, ou seja, de compensar os efeitos da zona-morta de maneira robusta, é descrita a seguir.

7.5.2 Compensação de zona-morta por ação integral

A Figura 7.23 ilustra um sistema em malha fechada onde o processo possui zona-morta em sua entrada e foi adicionada ação integral no controlador. Se o erro $e = r - y$ não for nulo, a ação integral estará acumulando este erro ao longo do tempo até que, em algum instante, o sinal de controle sai da faixa da zona-morta e passa a haver atuação sobre o sistema. Esse comportamento da ação integral termina somente quando o erro $e = y - r$ for nulo, isto é, $y = r$.

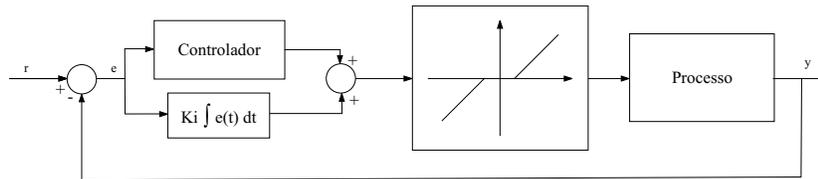


Figura 7.23 - Compensação de zona-morta com ação integral no controlador

Note que não há dependência em relação aos limites da zona-morta. Assim, mesmo que os limites da zona-morta venham a mudar ao longo do tempo em função de desgastes do processo, a ação integral ainda garantirá a precisão do sistema em regime permanente. É importante observar que a ação integral deve estar *antes* da zona-morta. De nada adianta a ação integral estar no processo, pois, nesse caso, o sinal de erro precisa passar pela zona-morta antes de chegar à entrada da ação integral. Dessa forma, a ação integral no processo não tem como corrigir o erro em regime permanente introduzido pela zona-morta.

Em processos que não possuem, por natureza, ação integral, esta é em geral incluída no controlador e a compensação da zona-morta já fica garantida. Por outro lado, em processos que envolvem ação integral (como no caso do controle de posição de um motor CC) será necessário, mesmo assim, adicionar ação integral no controlador para compensar o efeito da zona-morta, conforme foi explanado no parágrafo anterior. O ajuste dos parâmetros da ação integral deverá ser tal que o sistema em malha fechada, sem levar em conta a zona-morta, é estável. Para melhorar a resposta transitória podem ser feitos reajustes desses parâmetros utilizando ferramentas de simulação ou protótipos para ensaio.

7.6 Programação de ganhos

O ajuste do controlador é feito com base nas características do modelo de pequenos sinais do processo, que usualmente representa uma aproximação linear de um modelo originalmente não-linear, como

Capítulo 7 Aspectos não-lineares

visto na seção 4.3. Essa aproximação é feita em torno de um ponto de operação e os coeficientes resultantes no modelo dependem do particular ponto de operação escolhido. Então os parâmetros da função de transferência do processo dependem do ponto de operação do sistema, expressando o fato de que seu comportamento dinâmico é alterado para diferentes condições de operação. Eventuais variações nos parâmetros físicos do sistema também podem causar essas alterações. Quando o processo deve operar em condições muito distintas entre si, seu comportamento dinâmico pode sofrer alterações significativas. Um ajuste feito para uma determinada condição de operação possivelmente não será satisfatório para outra condição na qual as características do processo são bastante distintas. Nesses casos pode não ser possível encontrar um único ajuste do controlador que forneça desempenho satisfatório em todas as condições de operação.

Se as alterações no comportamento dinâmico do processo são conhecidas, é possível alterar os parâmetros do controlador monitorando a condição de operação do sistema. O controlador terá diferentes ajustes previamente determinados e seus parâmetros serão alterados de forma pré-programada, correspondendo um ajuste distinto a cada diferente condição de operação. A essa estratégia dá-se o nome de *programação de ganhos* (do inglês *gain scheduling*).

A programação de ganhos visa compensar as alterações no comportamento dinâmico do processo por meio do acompanhamento das alterações em sua condição de operação. O principal problema em definir uma programação de ganhos é encontrar variáveis mensuráveis no processo que estejam relacionadas com as alterações de seu comportamento dinâmico. Por vezes a própria referência do sistema determina essas alterações de comportamento e pode ser utilizada para identificar a condição de operação do sistema. Então o controlador terá diferentes ajustes para diferentes faixas de valor de referência. Em outros casos pode ser difícil encontrar variáveis facilmente mensuráveis que estejam relacionadas com a condição de operação do sistema. Uma vez encontradas as variáveis adequadas são realizados os ajustes, um para cada condição de operação. Cada ajuste pode ser feito usando o método mais conveniente dentre aqueles apresentados nos capítulos anteriores.

Exemplo 7.7 Processo de nível

De acordo com a equação (4.22) a função de transferência entre a vazão de entrada do tanque e seu nível é dada por:

$$\frac{\Delta h(s)}{\Delta q_i(s)} = \frac{\alpha}{\beta s + 1} \quad (7.3)$$

com:

$$\alpha = 2R\sqrt{\rho g h_0 - p_o} \quad (7.4)$$

$$\beta = 2A\rho R\sqrt{\rho g h_0 - p_o} \quad (7.5)$$

onde h_0 é a referência de nível. Assim, o comportamento dinâmico do processo e conseqüentemente sua função de transferência são univocamente determinados pelo valor da referência. Para um processo com essa função de transferência, um controlador PI pode ser ajustado por alocação de pólos.

Se os pólos desejados para o sistema em malha fechada são dados por $p_1 = p_2^* = -\xi\omega_n + j\omega_d$, isto é, com frequência de oscilação ω e amortecimento ξ , então aplicando a equação diofantina (ver seção 5.2) obtém-se o controlador:

$$C(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) \quad (7.6)$$

com:

$$K = \frac{2\beta\xi\omega_n - 1}{\alpha} \quad (7.7)$$

$$T_i = \frac{2\beta\xi\omega_n - 1}{\beta\omega_n^2} \quad (7.8)$$

Deve-se tomar o cuidado de escolher ξ e ω_n tais que $2\xi\omega_n > 1/\beta$ para que o sistema de malha fechada seja de fase mínima. Com efeito, a função de transferência em malha fechada com o processo (7.3) a (7.5) e o controlador (7.6) a (7.8) é dada por:

$$T(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

Capítulo 7 Aspectos não-lineares

$$\begin{aligned}
 &= \frac{Ks + K/T_i}{s(\beta s + 1) + \alpha(Ks + K/T_i)} \\
 &= \frac{(2\beta\xi\omega_n - 1)s + \beta\omega_n^2}{\alpha\beta(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}
 \end{aligned}$$

Substituindo (7.4) e (7.5) em (7.7) e (7.8) obtém-se a programação de ganhos:

$$K = \frac{4A\rho R\sqrt{\rho gh_0 - p_o}\xi\omega_n - 1}{2R\sqrt{\rho gh_0 - p_o}} \quad (7.9)$$

$$T_i = \frac{4A\rho R\sqrt{\rho gh_0 - p_o}\xi\omega_n - 1}{2A\rho R\sqrt{\rho gh_0 - p_o}\omega_n^2} \quad (7.10)$$

O controle com programação de ganhos consiste, portanto, em monitorar as variações de referência de nível e de pressão externa e alterar correspondentemente os ganhos do controlador PI de acordo com as expressões (7.9) e (7.10). Dessa forma a resposta do sistema apresentará sempre o mesmo desempenho transitório, com os pólos de malha fechada sendo alocados sempre nas mesmas posições especificadas por ξ e ω_n , independentemente da condição de operação.

De acordo com a programação (7.9) e (7.10), os ganho do controlador PI serão recalculados e alterados cada vez que for alterada a referência. A constante alteração dos parâmetros do PID, assim como a necessidade de efetuar este cálculo, muitas vezes não é conveniente e em geral não é uma função disponível em controladores comerciais. É mais usual efetuar alterações nos parâmetros do controlador somente quando a variação da condição de operação ultrapassar uma determinada tolerância, mantendo os parâmetros constantes dentro de faixas predefinidas de condições de operação. São então definidas faixas de operação, e a cada faixa um ajuste previamente determinado é aplicado. Assim, a frequência com que os parâmetros do PID são alterados é reduzida e não é preciso recalculá-los, pois estes já estão previamente armazenados.

As variáveis que determinam a condição de operação do sistema e seu comportamento dinâmico de pequenos sinais podem ser outras que não a referência e por vezes de difícil determinação.

Exemplo 7.8 Forno com carga variável

Considere o modelo de um forno, apresentado na subseção 4.2.1. A função de transferência da variável manipulada para a variável de processo é dada por:

$$G(s) = \frac{T(s)}{P(s)} = \frac{1}{C s + k_T}$$

Sejam $C = 40\text{J}/^\circ\text{C}$ e $k_T = 0,2\text{W}/^\circ\text{C}$. O desempenho transitório desejado é de $t_s \leq 10 \text{ min} = 600 \text{ s}$ e $M_o \approx 0$, sendo desejado ainda erro nulo em regime permanente para referência do tipo salto. Para atender a essas especificações deve-se utilizar um controlador PI e os pólos de malha fechada podem ser alocados reais e iguais, ambos em $p_1 = p_2 = -0,01 \text{ s}^{-1}$. Seja então:

$$C(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$$

Aplicando a equação diofantina ao problema obtém-se:

$$K = 0,6 \text{ W}/^\circ\text{C} \quad T_i = 150 \text{ s}$$

O controlador foi ajustado para os parâmetros dados, fornecendo a resposta transitória desejada para esta condição. Se a carga do forno é alterada, esta alteração se reflete na capacidade térmica C , cuja variação pode deteriorar o desempenho do sistema. Por exemplo, se a capacidade térmica triplica e o ajuste do controlador é mantido, então os pólos de malha fechada passam a ser:

$$p_1 = p_2^* = (-0,0033 + j0,0047) \text{ s}^{-1}$$

que resulta em $t_s \approx 19 \text{ min}$ e $M_o \approx 18\%$.

A função de transferência deste processo é similar à do exemplo anterior, com $\alpha = 1/k_T$ e $\beta = C/k_T$. Se os parâmetros C e k_T são mensuráveis, uma programação de ganhos similar pode ser aplicada. Para tanto, é necessário conhecer o valor do parâmetro C , que é a variável que determina a condição de operação e, portanto, ao qual deve estar associada a programação de ganhos.

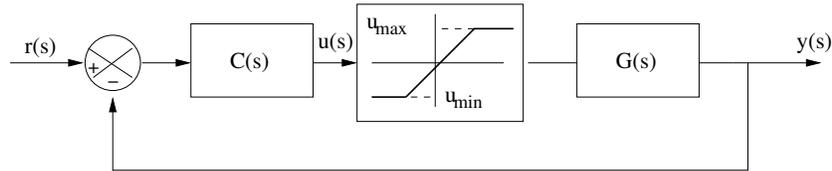


Figura 7.24 - Sistema de controle com saturação

7.7 Exercícios

- 1) Em que consiste o fenômeno de *wind-up* da ação integral? Cite 2 técnicas que permitem minimizar esse fenômeno.
- 2) Por que muitas vezes, em servomecanismos (controle de posição), justifica-se a utilização de uma ação integral no controle?
- 3) Considere o sistema de controle dado na Figura 7.24.

onde $G(s) = \frac{10}{[(s+2)^2+16]}$ e $C(s) = \frac{2,5[(s+2)^2+16]}{s(s+10)}$

- a) Supondo $u_{\max} = 10$, qual a máxima referência constante que pode ser seguida em regime permanente com erro nulo?
- b) Supondo $u_{\min} = -3$ e $r(t) = -1$, qual será o valor em regime permanente de $u(t)$ e de $y(t)$?
- c) Supondo $u_{\max} = 5$ e $u_{\min} = -1$, esboce $u(t)$ e $y(t)$, considerando a aplicação de um salto de amplitude 5 em $r(t)$.
- d) Simule digitalmente este sistema com diferentes valores de referência, verificando o desempenho do sistema em regime permanente e em regime transitório, bem como o comportamento da variável manipulada.

Referências

- AGUIRRE, L. A. *Introdução à identificação de sistemas*. 2. ed. Belo Horizonte: UFMG, 2004.
- ÅSTRÖM, K. J.; HÄGGLUND, T. *PID Controllers: theory, design and tuning*. 2. ed. Research Triangle Park: International Society for Measurement and Control, 1995.
- ÅSTRÖM, K. J.; WITTENMARK, B. *Computer controlled systems: theory and design*. 3. ed. Londres: Prentice-Hall, 1997.
- BORSE, G. *Numerical methods with MATLAB*. Boston: PWS Publishing Company, 1997.
- CHEN, C. T. *Linear systems theory and design*. 3. ed. New York: Oxford University Press, 1999.
- FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; NAEINI, A. *Feedback control of dynamic systems*. 3. ed. Boston: Addison-Wesley, 1994.
- GEROMEL, J. C.; PALHARES, A. G. B. *Análise linear de sistemas dinâmicos*. São Paulo: Edgard-Blücher, 2004.
- HAYKIN, S.; VEEN, B. van. *Sinais e sistemas*. Porto Alegre: Bookman, 2001.
- KRAUSE, P. *Analysis of electric machinery*. New York: IEEE Press, 1994.
- KUNDUR, P. *Power systems stability and control*. New York: McGraw-Hill, 1994.

- LEVINE, W. *The control handbook*. Boca Raton: CRC Press, 1996.
- LUYBEN, M. L.; LUYBEN, W. L. *Essentials of process control*. New York: McGraw-Hill, 1997.
- OGATTA, K. *Engenharia de controle moderno*. 2. ed. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil, 1993.
- ZIEGLER, J. G.; NICHOLS, N. B. Optimum settings for automatic controllers. *Transactions of the ASME*, [S.l.], v. 64, p. 759–768, 1942.

Apêndice A

Representação de sistemas dinâmicos

A.1 Sistemas lineares e invariantes no tempo

Um sistema dinâmico monovariável (isto é, com apenas uma entrada e uma saída) é dito linear e invariante no tempo (LIT) se o seu comportamento pode ser descrito por uma equação diferencial da forma:

$$\frac{d^n y(t)}{dt} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt} + \dots + b_0 u(t) \quad (\text{A.1})$$

onde $u(t)$ é o sinal de excitação (entrada) e $y(t)$ é o sinal de saída. No caso de um sistema causal (que é o caso dos sistemas físicos) tem-se $n \geq m$ e diz-se que o sistema (ou a equação diferencial) é de ordem n .

A resposta do sistema a uma entrada impulsiva, ou seja, para¹ $u(t) = \delta(t)$ é genericamente dada pela função $g(t)$:

$$u(t) = \delta(t) \Rightarrow y(t) = g(t)$$

A partir da resposta impulsiva do sistema, é possível calcular a resposta do sistema a qualquer entrada a partir da seguinte integral

¹ $\delta(t)$ denota um impulso de Dirac.

de convolução (Haykin; Veen (2001); Chen (1999))

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau)u(\tau)d\tau \quad (\text{A.2})$$

em outras palavras, a resposta de um sistema linear a uma dada excitação (entrada) $u(t)$ é dada pela convolução entre sua resposta impulsiva e o sinal $u(t)$.

Um sistema linear, como diz o próprio nome, apresenta a propriedade de linearidade, a qual pode ser resumida pelo *princípio da superposição* enunciado a seguir.

Princípio da superposição - se

$$\begin{aligned} u(t) = u_1(t) &\Rightarrow y(t) = y_1(t) \\ u(t) = u_2(t) &\Rightarrow y(t) = y_2(t) \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} u(t) = \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t) &\Rightarrow y(t) = \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) \\ \forall \alpha_1, \alpha_2, u_1(t), u_2(t) \end{aligned}$$

A.2 Funções de transferência

O comportamento dinâmico dos sistemas físicos em *torno de um determinado ponto de operação*, em geral, pode ser descrito por uma equação diferencial linear com coeficientes constantes, sob a forma (A.1) que relaciona o sinal de entrada com o sinal de saída. Tal procedimento é chamado de *linearização em torno de um ponto de equilíbrio* (ver Capítulo 4).

Considerando-se nulos os valores iniciais (isto é, em $t=0$) de $y(t)$, $u(t)$ e todas suas derivadas, e aplicando-se a transformada de Laplace à equação (A.1), obtém-se:

$$\begin{aligned} (s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0)y(s) &= \\ = (b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_2s^2 + b_1s + b_0)u(s) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

onde $y(s)$ e $u(s)$ denotam respectivamente as transformadas de Laplace de $y(t)$ e $u(t)$.

Apêndice A Representação de sistemas dinâmicos

Pode-se então definir a *função de transferência do sistema*, associada à equação (A.3) e denotada por $G(s)$ como a relação entre $y(s)$ e $u(s)$:

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} y(s) \quad (\text{A.4})$$

Por outro lado, aplicando-se a transformada de Laplace à integral de convolução (A.2) obtém-se:

$$y(s) = G(s).u(s) \quad (\text{A.5})$$

onde $G(s)$ é a transformada de Laplace da resposta impulsiva do sistema linear. Comparando (A.4) com (A.5) conclui-se que a função de transferência de um sistema corresponde à transformada de Laplace da resposta impulsiva do mesmo.²

Genericamente se expressa uma função de transferência como:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

onde $N(s)$ e $D(s)$ denotam genericamente polinômios em s . A partir dessa representação e supondo que as raízes de $N(s)$ são todas diferentes das raízes de $D(s)$, define-se o seguinte:

- *pólos de $G(s)$* - raízes de $D(s)$;
- *zeros de $G(s)$* - raízes de $N(s)$;
- *ordem do sistema* - grau de $D(s)$;
- *tipo do sistema* - número de pólos da $G(s)$ em $s = 0$.

Exemplo A.1 Seja um sistema representado pela seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{s^2 + 5s + 6}{s^3 + 15s^2 + 50s} = \frac{(s+2)(s+3)}{s(s+5)(s+10)}$$

Tem-se então:

²Note também que a transformada de Laplace de um impulso de Dirac é igual a 1.

- pólos: 0; -5; -10;
- zeros: -3; -2;
- tipo do sistema: 1 (apenas um pólo na origem);
- ordem do sistema: 3.

Conhecendo-se a transformada de Laplace de uma determinada entrada $u(t)$ e a função de transferência do sistema, é possível, através da transformada inversa de Laplace, determinar a resposta temporal do sistema, ou seja,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)u(s)]$$

Os sinais de entrada mais utilizados como referência em sistemas de controle são sinais do tipo salto (sinais constantes), sinais do tipo rampa (sinais que variam linearmente com o tempo) ou combinações destes definindo o que chamamos de perfis de *rampas e patamares*. A transformada de Laplace desses dois sinais são:

- salto de amplitude $K - \frac{K}{s}$;
- rampa com declividade $K - \frac{K}{s^2}$.

A resposta dos sistemas LIT a excitações do tipo salto ou rampa gerarão em sua saída sinais que serão combinações de funções salto, rampa, exponenciais e senóides amortecidas (moduladas por funções exponenciais). O valor do expoente dessas funções exponenciais, bem como a frequência da oscilação das senóides, estão diretamente relacionados com o valor dos pólos do sistema. Os coeficientes associados a cada uma dessas funções exponenciais podem ser calculados pelo método das frações parciais (Haykin; Veen (2001)), e dependem diretamente do valor dos pólos e zeros. Nas seções subseqüentes, será visto com mais detalhes que os pólos e zeros estão diretamente ligados ao desempenho transitório e à estabilidade dos sistemas. Por outro lado, o tipo do sistema tem papel importante na caracterização da precisão em regime permanente de sistemas realimentados.

Seguem algumas considerações importantes sobre funções de transferência.

Apêndice A Representação de sistemas dinâmicos

- Funções de transferência definem-se apenas para sistemas lineares e invariantes no tempo. Não existe função de transferência de um sistema não-linear.
- O comportamento de sistemas não-lineares no entorno de um determinado ponto de operação pode ser aproximado por um modelo linear localmente válido. Esse fato justifica a grande utilização de funções de transferência em sistemas de controle, mesmo quando os processos são não-lineares. Nesse caso é fundamental ter em mente que:
 - a função de transferência descreverá adequadamente o comportamento do sistema somente se o sistema permanecer operando no entorno do ponto de operação para a qual a mesma foi obtida;
 - para diferentes pontos de operação do sistema pode-se ter diferentes funções de transferência.
- A definição da função de transferência pressupõe que o sistema esteja relaxado, ou seja, todas as condições iniciais são consideradas nulas. Caso essa hipótese não se verifique, a resposta do sistema apresentará uma parcela devido a essas condições iniciais que também pode ser calculada com o auxílio da transformada de Laplace (Haykin; Veen (2001)).
- A representação de um sistema dinâmico através de uma função de transferência é uma representação dita *entrada-saída*. Com efeito, uma função de transferência não fornece nenhuma informação sobre o que ocorre com os sinais no interior do sistema.

A.3 Sistemas de 1ª ordem

Um sistema linear de primeira ordem é descrito pela seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1} = \frac{K/T}{s + 1/T} = \frac{\bar{K}}{s + p}$$

onde:

- T é a constante de tempo;
- K corresponde ao ao ganho estático do processo, ou seja,

$$K = G(0) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$$

- p é o pólo do processo e corresponde ao inverso de T .

Observe que a função de transferência pode ser expressa em função da constante de tempo T e do ganho estático K ou através do seu pólo p e pelo ganho \bar{K} .

Considerando-se uma entrada do tipo salto unitário, ou seja, $u(s) = \frac{1}{s}$, a transformada de Laplace da resposta é dada por:

$$y(s) = \frac{\bar{K}}{s(s+p)} = \frac{\bar{K}/p}{s} - \frac{\bar{K}/p}{s+p}$$

Aplicando a transformada de Laplace inversa, e notando que $\bar{K}/p = K$, obtém-se então que:

$$y(t) = K(1 - e^{-pt}) \quad (\text{A.6})$$

Desse modo, podemos relacionar os parâmetros da função de transferência com as seguintes características da resposta.

- Valores inicial e final - a partir da aplicação dos teoremas do valor inicial e final, respectivamente se tem que:

$$y(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sy(s) = 0$$

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sy(s) = K$$

- Constante de tempo - a constante de tempo do processo corresponde ao tempo que a resposta do sistema ao salto unitário leva para alcançar 63% do seu valor de regime permanente. Tal fato pode ser comprovado a partir da equação (A.6):

$$y(T) = y(1/p) = K(1 - e^{-1}) = K(1 - 0,37) = 0,63K$$

Apêndice A Representação de sistemas dinâmicos

- Tempo de acomodação - considerando-se que o tempo de acomodação (ou de estabilização) corresponde ao tempo para a resposta entrar em uma faixa de 98% do valor de regime permanente tem-se que:

$$\begin{aligned}y(t_s) &= K(1 - e^{-pt_s}) = 0,98K \\ \Rightarrow e^{-pt_s} &= 0,02 \Rightarrow t_s = \frac{3,91}{p}\end{aligned}$$

Assim, de maneira aproximada, podemos considerar que o tempo de acomodação de um processo de 1ª ordem é dado de maneira aproximada por 4 constantes de tempo, ou seja,

$$t_s \approx \frac{4}{p} = 4T \quad (\text{A.7})$$

A partir da equação (A.7), conclui-se que o tempo de acomodação é diretamente proporcional ao valor de T , ou de maneira equivalente, inversamente proporcional ao valor de p .

A influência dos valores dos parâmetros K e T na resposta do sistema pode ser observada nas Figuras A.1 e A.2. Na Figura A.1 são mostradas as respostas para diversos valores de K , considerando-se $T = 1$. Na Figura A.2 são mostradas as respostas para diversos valores de T , considerando-se $K = 1$.

A.4 Sistemas de 2ª ordem

Um sistema (ou processo) de 2ª ordem é genericamente descrito pela seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{Kw_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2}$$

onde:

- K é o ganho estático do processo, ou seja, $K = G(0) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$;
- w_n é a frequência natural de oscilação;

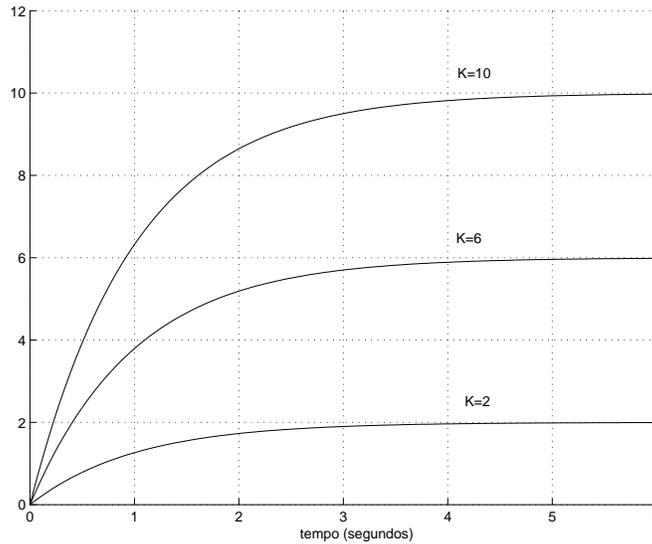


Figura A.1 - Influência do valor de K na resposta de um sistema de 1ª ordem

- ξ é o coeficiente de amortecimento.

Nota-se que $G(s)$ possui 2 pólos. Esses pólos correspondem às raízes do denominador de $G(s)$ que podem genericamente ser obtidas em função dos parâmetros K , w_n e ξ :

$$\sigma_1 = -\xi w_n + w_n \sqrt{\xi^2 - 1}$$

$$\sigma_2 = -\xi w_n - w_n \sqrt{\xi^2 - 1}$$

Dependendo do valor de ξ , o sistema pode apresentar dois pólos reais, um par de pólos complexos conjugados ou um par de pólos imaginários puros. Esses três casos são apresentados a seguir.

A.4.1 Caso 1 (sistema hiperamortecido): $\xi \geq 1$

Nesse caso, como $\xi^2 - 1 \geq 0$, o sistema apresentará dois pólos reais. Considerando-se uma entrada do tipo salto unitário, ou seja, $u(s) = \frac{1}{s}$,

Apêndice A Representação de sistemas dinâmicos

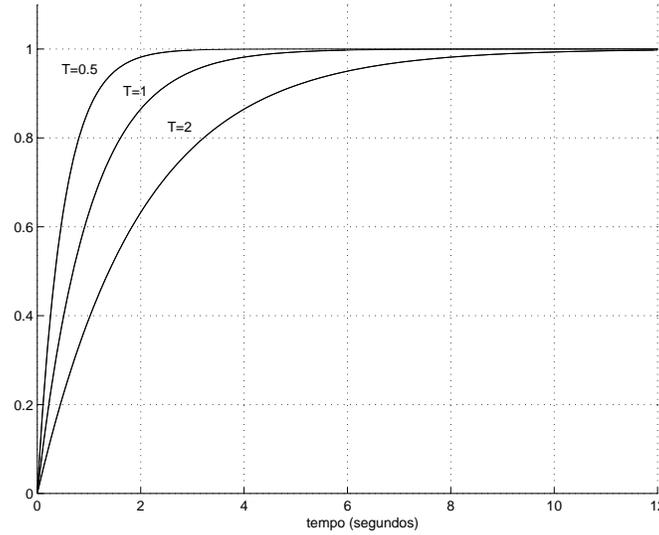


Figura A.2 - Influência do valor de T na resposta de um sistema de 1ª ordem

a transformada de Laplace da resposta é dada por:

$$y(s) = \frac{K w_n^2}{s(s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2)} = \frac{K}{s} + \frac{K_1}{s + p_1} + \frac{K_2}{s + p_2}$$

onde:

$$p_1 = -\sigma_1 = \xi w_n - w_n \sqrt{\xi^2 - 1}$$

$$p_2 = -\sigma_2 = \xi w_n + w_n \sqrt{\xi^2 - 1}$$

$$K_1 = \frac{K}{2(\xi^2 - 1) - 2\xi\sqrt{\xi^2 - 1}} ; K_2 = \frac{K}{2(\xi^2 - 1) + 2\xi\sqrt{\xi^2 - 1}}$$

É importante observar que:

$$p_2 > p_1 > 0$$

Aplicando-se a transformada de Laplace inversa obtém-se então:

$$y(t) = K + K_1 e^{-p_1 t} + K_2 e^{-p_2 t} \quad (\text{A.8})$$

Nesse caso a resposta ao salto não apresentará sobrepassagem e o tempo de acomodação poderá ser aproximado através do valor do pólo mais próximo do eixo real, o qual gerará o termo exponencial com decaimento mais lento ($K_1 e^{-p_1 t}$) em (A.8) e, portanto, levará mais tempo para se extinguir ao longo do tempo. Então temos, de maneira análoga ao caso do sistema de 1ª ordem:

$$t_s \approx \frac{4}{p_1}$$

A curva de uma resposta típica de um sistema de 2ª ordem hiperamortecido a uma entrada do tipo salto é mostrada na Figura A.3. Diferentemente da resposta de um sistema de primeira ordem, onde o ponto de derivada máxima da curva de $y(t)$ ocorre no instante $t = 0$, aqui o ponto de derivada máxima (ponto de inflexão) se dá em $t > 0$. A curva de resposta apresenta assim uma forma em *S*. Esse fato é causado pela presença do termo exponencial rápido $K_2 e^{-p_2 t}$. Note que esse termo tem influência apenas nos instantes iniciais da resposta.

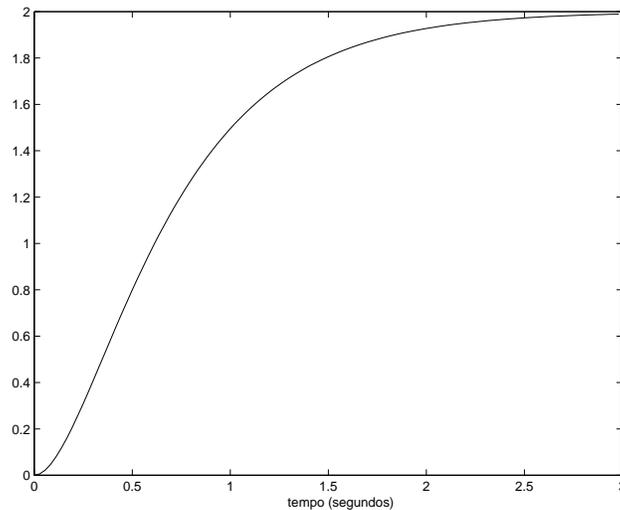


Figura A.3 - Resposta típica de um sistema de 2ª ordem com $\xi \geq 1$ a uma entrada do tipo salto

Apêndice A Representação de sistemas dinâmicos

No caso limite correspondente a $\xi = 1$, os dois pólos serão iguais, isto é, $\sigma_1 = \sigma_2 = -\xi w_n$. Esse caso também é chamado de *criticamente amortecido*. Para um dado valor de w_n , essa situação corresponde à resposta com tempo de acomodação mais rápido. Considerando $K = 1$ e $w_n = 1$, são mostradas na Tabela A.1 as posições dos dois pólos do sistema para diversos valores de $\xi \geq 1$. Para esses mesmos casos, são apresentadas na Figura A.4 as respostas ao salto do sistema para cada valor de ξ .

Tabela A.1 - Pólos de um sistema de 2ª ordem hiperamortecido com $w_n = 1, K = 1$ e diversos valores de ξ

ξ	σ_1	σ_2
1	-1	-1
2	-0,27	-3,73
3	-0,17	-5,82
4	-0,13	-7,87

A.4.2 Caso 2 (sistema hipoamortecido): $0 \leq \xi < 1$

Nesse caso, como $\xi^2 - 1 < 0$, o sistema apresentará um par de pólos complexos conjugados.

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= -\xi w_n + j w_n \sqrt{1 - \xi^2} = -\xi w_n + j w_d \\ \sigma_2 &= -\xi w_n - j w_n \sqrt{1 - \xi^2} = -\xi w_n - j w_d\end{aligned}$$

O valor absoluto da parte imaginária, denotado genericamente por w_d , é denominado *freqüência natural amortecida do sistema*. Considerando-se uma entrada do tipo salto unitário, ou seja, $u(s) = \frac{1}{s}$, a transformada de Laplace da resposta é dada por:

$$\begin{aligned}y(s) &= \frac{K w_n^2}{s(s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2)} \\ &= \frac{K w_n^2}{s[(s + \xi w_n)^2 + w_d^2]}\end{aligned}$$

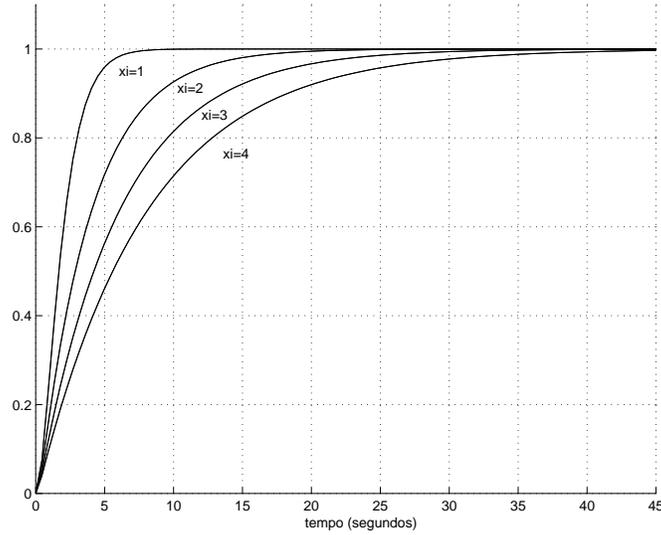


Figura A.4 - Resposta de um sistema de 2ª ordem hiperamortecido

$$= \frac{K}{s} + \frac{K_1(s + \xi w_n)}{[(s + \xi w_n)^2 + w_d^2]} + \frac{K_2 w_d}{[(s + \xi w_n)^2 + w_d^2]}$$

onde:

$$K_1 = -K \quad ; \quad K_2 = -\frac{K\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

Aplicando a transformada de Laplace inversa, obtém-se:

$$\begin{aligned} y(t) &= K(1 - e^{-\xi w_n t} \cos(w_d t) - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi w_n t} \text{sen}(w_d t)) \\ &= K(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi w_n t} \cos(w_d t - \phi)) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

onde $\phi = \arctan(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}})$.

Nesse caso a resposta ao salto sempre apresentará uma sobrepassagem. O valor da máxima sobrepassagem pode ser obtido calculando-se o valor máximo de $y(t)$. Para tanto, devemos obter o primeiro valor de t para o qual se tem:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{K w_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi w_n t} \text{sen}(w_d t) = 0$$

Apêndice A Representação de sistemas dinâmicos

Tabela A.2 - Pólos de um sistema de 2ª ordem hipoamortecido com $w_n = 1$, $K = 1$ e diversos valores de ξ

ξ	σ_1	σ_2
1	-1	-1
0,7	$-0,7 + j0,71$	$-0,7 - j0,71$
0,5	$-0,5 + j0,87$	$-0,5 - j0,87$
0,3	$-0,3 + j0,95$	$-0,3 - j0,95$
0,2	$-0,2 + j0,98$	$-0,2 - j0,98$

ou seja,

$$t = \frac{\pi}{w_n \sqrt{1 - \xi^2}}$$

Esse é o instante de tempo em que $y(t)$ será máximo e, portanto,

$$y_{max} = K(1 + e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}})$$

Como o valor de regime permanente da saída do sistema para uma entrada do tipo salto unitário será igual a K , tem-se então a seguinte expressão para o sobrepasso percentual em função de ξ :

$$Mo\% = 100e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\%$$

É importante observar que o valor de $Mo\%$ depende apenas do valor do amortecimento. Quanto mais amortecido o sistema, ou seja, quanto mais próximo ξ for de 1, menor será o valor de $Mo\%$. Por outro lado, quanto maior for ξ menor será w_d , ou seja, a frequência da oscilação amortecida que aparecerá na resposta será menor. Essas duas características dos sistemas de 2ª ordem hipoamortecidos podem ser melhor observadas na Figura A.5, onde são apresentadas as respostas de um sistema de 2ª ordem com $w_n = 1$, considerando-se diferentes valores de ξ . Os valores dos pólos do sistema são mostrados na Tabela A.2.

No caso limite em que $\xi = 0$, o sistema apresentará um par de pólos imaginários puros, o que levará ao aparecimento de um comportamento

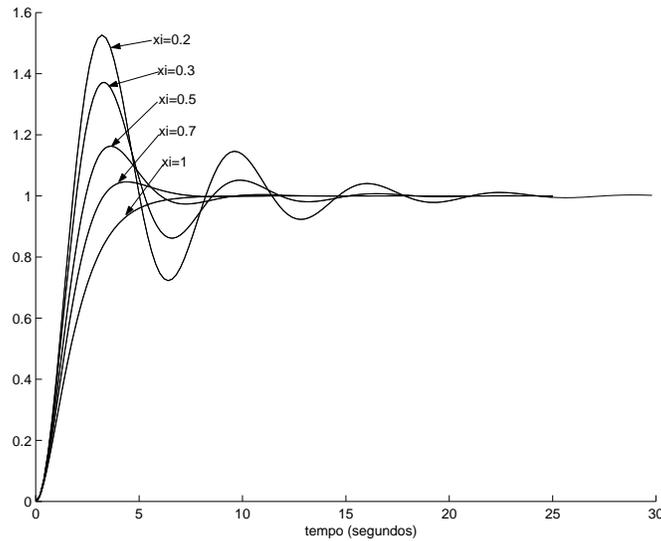


Figura A.5 - Influência de ξ no sobrepasso e na frequência de oscilação amortecida

senoidal puro em regime permanente. Tal fenômeno é mostrado na Figura A.6. Note que a frequência de oscilação em regime permanente será igual a w_n .

A partir dos valores de ξ e w_n , pode-se também estimar o tempo de acomodação do sistema. Considerando que a saída do sistema estará acomodada quando assumir valores dentro de uma faixa correspondente a $\pm 98\%$ do valor de regime permanente, a partir da expressão (A.9) devemos ter:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi w_n t_s} = 0,02$$

onde se obtém:

$$t_s = -\frac{\ln(0,02\sqrt{1-\xi^2})}{\xi w_n}$$

A partir dessa expressão pode-se concluir que:

$$t_s \approx \frac{4}{\xi w_n} \quad \text{para } \xi < 0,8$$

Apêndice A Representação de sistemas dinâmicos

$$t_s \approx \frac{5}{\xi w_n} \quad \text{para } 0,8 \leq \xi < 1$$

No gráfico da Figura A.7, considerando-se $\xi = 0,7$, é mostrado o tempo de acomodação obtido para diversos valores de w_n . Para esses mesmos casos, a Tabela A.3 mostra a posição dos dois pólos do sistema para cada valor de ξ .

Tabela A.3 - Pólos de um sistema de 2ª ordem hipoamortecido com $K = 1$, $\xi = 0,7$ e diversos valores de w_n

w_n	σ_1	σ_2
1	$-0,7 + j0,71$	$-0,7 - j0,71$
2	$-1,4 + j1,43$	$-1,4 - j1,43$
4	$-2,8 + j2,86$	$-2,8 - j2,86$

A.5 Sistemas de ordem superior

A.5.1 Caso geral

Para um sistema de ordem superior a dois, com função de transferência dada genericamente por:

$$G(s) = \frac{K(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)}$$

a resposta a um dado sinal de entrada depende da posição dos pólos (p_i , $i = 1, \dots, n$) e dos zeros (z_i , $i = 1, \dots, m$) dessa função de transferência, sendo difícil determinar, *a priori*, qual será a forma exata da resposta. A avaliação do comportamento do sistema deve ser feita a partir de uma expansão em frações parciais e a conseqüente obtenção analítica da resposta do sistema através da aplicação da transformada inversa de Laplace. Esse procedimento é descrito no exemplo a seguir.

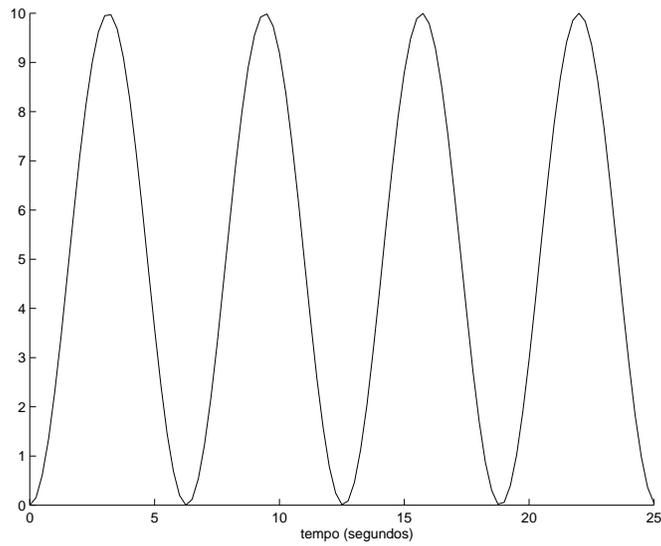


Figura A.6 - Caso sem amortecimento: $\xi = 0$

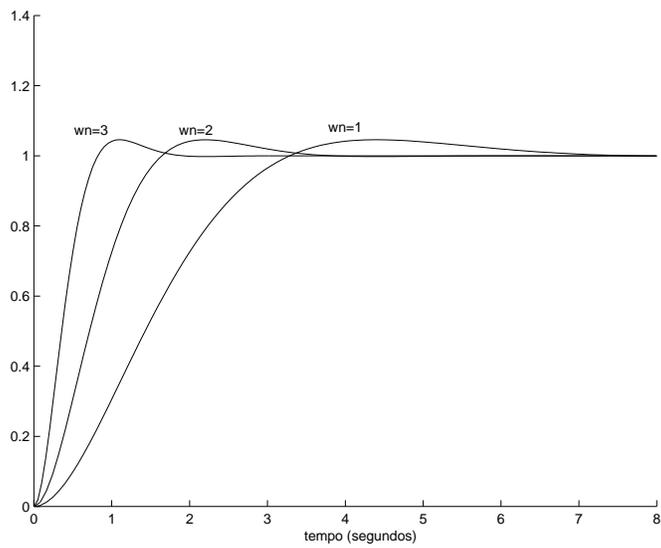


Figura A.7 - Efeito de w_n no tempo de acomodação

Exemplo A.2 Seja um processo descrito pela seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{52(s+5)}{(s+10)(s^2+4s+13)}$$

Considere agora a aplicação de um sinal do tipo salto em sua entrada. Expandindo-se a expressão da saída em frações parciais, tem-se:

$$\begin{aligned} y(s) = G(s) \cdot u(s) &= \frac{52(s+5)}{s(s+10)(s^2+4s+13)} \\ &= \frac{2}{s} + \frac{0,3562}{(s+10)} + \frac{-2,356s - 5,863}{(s+2)^2 + 3^2} \\ &= \frac{2}{s} + \frac{0,3562}{(s+10)} + \frac{-2,356(s+2)}{(s+2)^2 + 3^2} + \frac{-1,151}{(s+2)^2 + 3^2} \end{aligned}$$

A partir da utilização de uma tabela de transformadas, obtemos a resposta analítica do sistema:

$$y(t) = 2 + 0,3562e^{-10t} - 2,356e^{-2t} \cos 3t - 0,3836e^{-2t} \sin 3t$$

Na Figura A.8 mostra-se o gráfico de $y(t)$.

A.5.2 Dominância

Em sistemas de ordem superior, é comum que a função de transferência apresente um pólo real ou um par de pólos complexos conjugados cuja parte real, em módulo, é muito menor que a parte real dos demais pólos e zeros da função de transferência. Considerando-se que todos os pólos do sistema sejam negativos, este pólo real ou par de pólos irá ser responsável pelo aparecimento na resposta do sistema de uma exponencial com decaimento muito mais lento que as demais e será então predominante na resposta. Diz-se que este pólo ou par de pólos complexos conjugados exerce uma dominância na resposta.

Via de regra, podemos dizer que um pólo real ou um par de pólos complexos é dominante se sua parte real é 5 vezes menor (em módulo) que as partes reais dos demais pólos e zeros do sistema. Assim, na análise de dominância, basta considerar o pólo ou o par de pólos mais próximo do eixo imaginário e verificar se os demais pólos e zeros da função de transferência estão suficientemente afastados deste(s) no plano complexo.

No caso da efetiva existência da dominância, o comportamento do sistema pode ser aproximado como descrito a seguir.

- Pólo dominante real: o comportamento será muito próximo ao de um sistema de 1ª ordem, cujo pólo será o dominante e cujo ganho estático será o mesmo da função de transferência original.
- Par de pólos complexos dominante: o comportamento será muito próximo ao de um sistema de 2ª ordem com o par de pólos dominante e com ganho estático igual ao da função de transferência original.

O efeito da dominância é melhor ilustrado através dos exemplos a seguir.

Exemplo A.3 Considere as seguintes funções de transferência:

$$G_1(s) = \frac{2(s+2)}{(s+0,1)(s+5)(s+10)}$$

$$G_2(s) = \frac{13,33(s+0,3)}{(s+0,1)(s+5)(s+10)}$$

$$G_3(s) = \frac{57,14(s+0,07)}{(s+0,1)(s+5)(s+10)}$$

Observe que todas elas possuem o mesmo ganho estático (0,8) e o pólo de menor módulo (mais próximo do eixo imaginário) em $-0,1$. Considerando-se $G_1(s)$, observa-se que o módulo dos outros pólos e zeros são bem maiores que 0,1, o que configura um caso de dominância

Apêndice A Representação de sistemas dinâmicos

com um pólo real. Assim, $G_1(s)$ pode ser aproximada pela seguinte função de transferência de 1ª ordem:

$$G_4(s) = \frac{0,08}{(s + 0,1)}$$

Na Figura A.9 é apresentada a resposta a um salto unitário aplicado aos sistemas representados respectivamente por $G_1(s)$ e $G_4(s)$. Como esperado, devido à dominância, as duas respostas são praticamente idênticas.

Por outro lado, em $G_2(s)$ e $G_3(s)$, nota-se a existência de zeros próximos do pólo em $-0,1$ e, por conseguinte, não se configura um caso de dominância. A Figura A.10 mostra a resposta a um salto unitário aplicado aos sistemas representados respectivamente por $G_2(s)$, $G_3(s)$ e $G_4(s)$. Observa-se agora que as respostas de $G_2(s)$ e $G_3(s)$ diferem bastante da resposta de $G_4(s)$ e que a posição do zero (à esquerda ou à direita do pólo de menor módulo) influi de maneira considerável nas respostas.

Exemplo A.4 Considere as seguintes funções de transferência:

$$\begin{aligned}G_1(s) &= \frac{240}{(s^2 + 4s + 20)(s + 10)} \\G_2(s) &= \frac{480}{(s^2 + 4s + 20)(s + 20)} \\G_3(s) &= \frac{72}{(s^2 + 4s + 20)(s + 3)} \\G_4(s) &= \frac{24}{(s^2 + 4s + 20)}\end{aligned}$$

Observe que todas elas apresentam um ganho estático de 1, 2 e um par de pólos complexos em $-2 + 4j$. A Figura A.11 mostra a resposta a um salto unitário aplicado aos sistemas representados pelas funções de transferência.

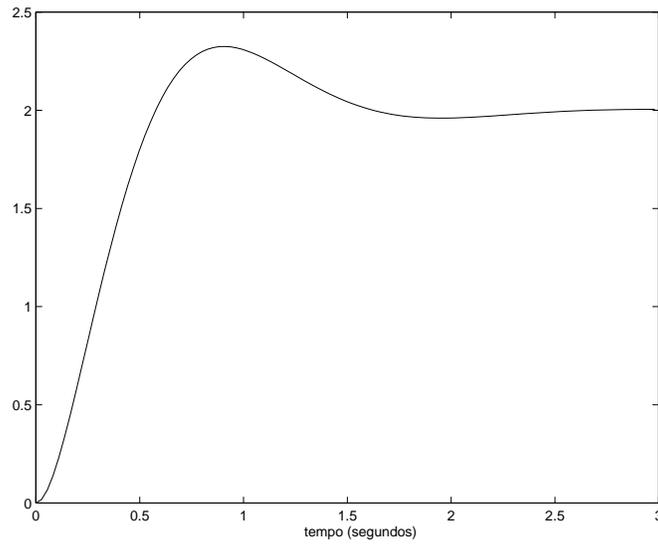


Figura A.8 - Resposta temporal

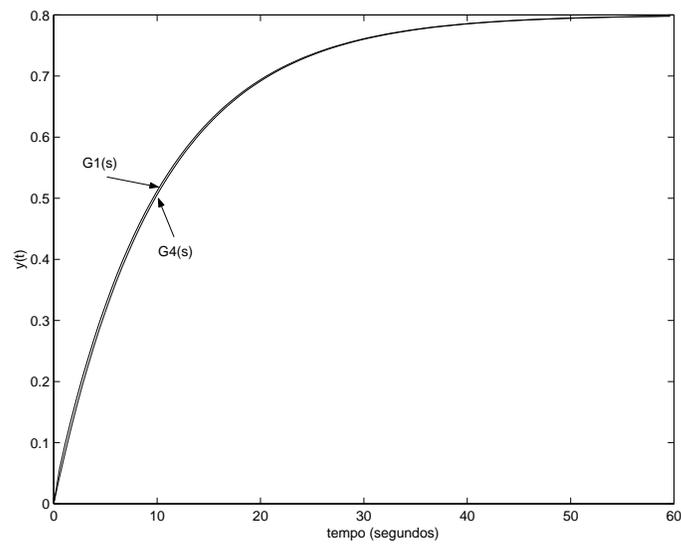


Figura A.9 - Dominância de pólo real

Apêndice A Representação de sistemas dinâmicos

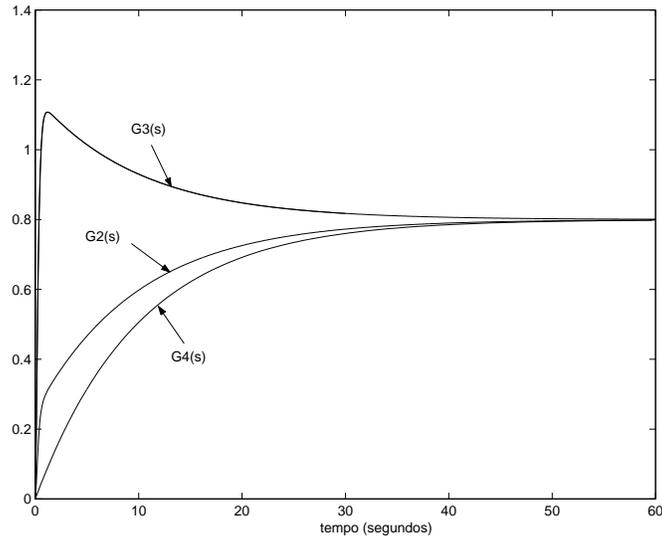


Figura A.10 - Não dominância de pólo real

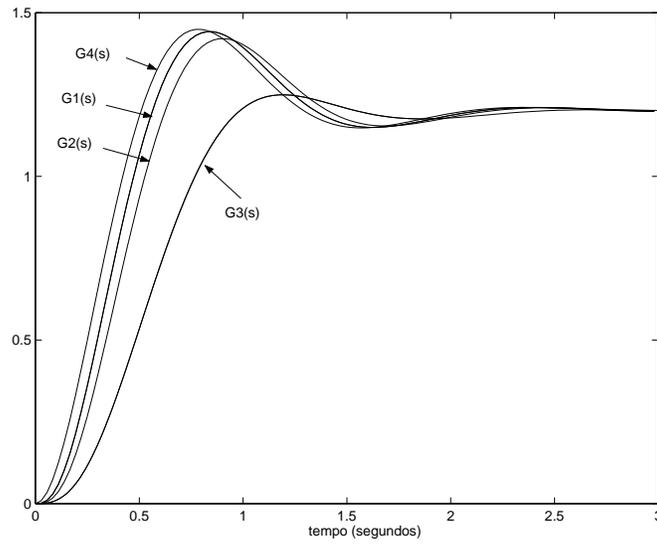


Figura A.11 - Dominância de par de pólos complexos

Nota-se que $G_1(s)$, $G_2(s)$ e $G_3(s)$ possuem ainda um pólo real adicional. Quanto mais afastado está este pólo real do par de pólos complexos em $-2 + 4j$, mais a resposta se aproxima daquela do sistema representado por $G_4(s)$. Com efeito, em $G_1(s)$ e $G_2(s)$ pode-se considerar a dominância do par de pólos complexos e a aproximação do comportamento do sistema pela função de transferência de 2ª ordem $G_4(s)$. O mesmo não se verifica com a função $G_3(s)$, pois o pólo real não está suficientemente afastado dos pólos complexos. Para que a dominância se verificasse seria necessário que o pólo real tivesse módulo pelo menos 5 vezes maior que a parte real do par de pólos complexos conjugados mais próximo do eixo imaginário.

A.6 Sistemas de fase não-mínima

Sistemas de fase não-mínima são sistemas que apresentam zeros no semiplano direito do plano complexo, ou seja, com parte real positiva.³ Esse fato provoca o aparecimento do que se costuma chamar de *resposta inversa*: ao aplicarmos um sinal do tipo salto na entrada deste tipo de processo, a saída do sistema assume, nos primeiros instantes de tempo, valores com sinal inverso ao do salto aplicado, ou seja, o sistema reage momentaneamente no sentido contrário ao da excitação.

No exemplo a seguir será ilustrado o comportamento de um sistema de fase não-mínima.

Exemplo A.5 Considere um sistema representado pela seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{5(1 - 4s)}{(1 + 2s)(1 + 10s)}$$

³Alguns autores consideram como de fase não-mínima sistemas possuindo pólos no semiplano direito. Como esse conceito está ligado ao conceito de resposta em frequência e como não faz sentido falar em resposta em frequência de sistemas possuindo pólos com parte real positiva, preferimos aqui não incluir este tipo de sistema nesta classe.

Apêndice A Representação de sistemas dinâmicos

Observe que o sistema apresenta um zero em $0,25 > 0$ e, portanto, é de fase não-mínima. A resposta do sistema a um salto unitário positivo é apresentada na Figura A.12. Pode-se observar claramente a ocorrência da resposta inversa nos primeiros instantes.

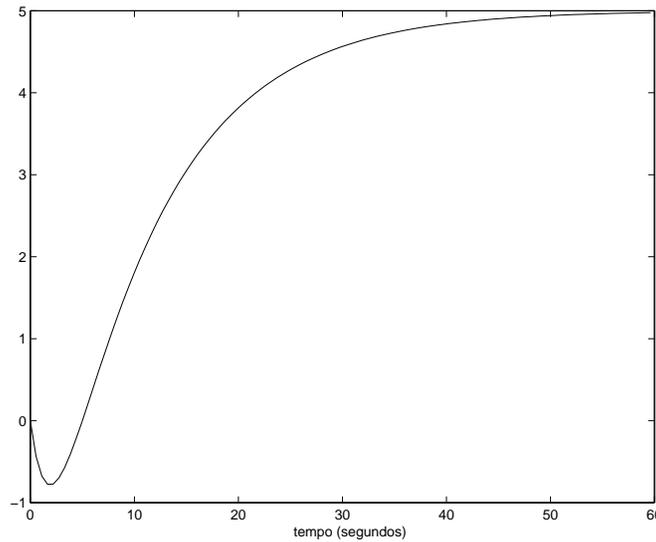


Figura A.12 - Comportamento de fase não-mínima (resposta transitória inversa)

A.7 Resposta a entradas senoidais

Considere um sistema linear estável, cujo comportamento é descrito pela função de transferência $G(s) = \frac{y(s)}{u(s)}$. Suponha esse sistema excitado por um sinal senoidal:⁴

$$u(t) = A \sin(w_1 t)$$

⁴A mesma análise poderia ser feita considerando um sinal cossenoidal.

onde A e w_1 denotam respectivamente a amplitude e a frequência da senóide.

Sendo a transformada de Laplace de $u(t)$ dada por:

$$u(s) = \frac{Aw_1}{s^2 + w_1^2}$$

tem-se que:

$$\begin{aligned} y(s) &= \frac{Aw_1 G(s)}{(s - jw_1)(s + jw_1)} \\ &= \frac{K_1}{(s - jw_1)} + \frac{K_2}{(s + jw_1)} + y_e(s) \end{aligned}$$

onde y_e possui todos os pólos da $G(s)$, os quais, por hipótese de estabilidade, estão todos localizados no semiplano esquerdo aberto do plano complexo, isto é, têm parte real estritamente negativa.

As constantes K_1 e K_2 podem ser facilmente calculadas pelo método dos resíduos, obtendo-se:

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{w_1 A G(jw_1)}{2jw_1} \\ K_2 &= \frac{w_1 A(-jw_1)}{(-2jw_1)} \end{aligned}$$

Portanto:

$$y(s) = \frac{1}{2j} \frac{AG(jw_1)}{(s - jw_1)} - \frac{1}{2j} \frac{AG(-jw_1)}{(s + jw_1)} + y_e(s) \quad (\text{A.10})$$

Levando-se em conta que:

$$\begin{aligned} G(jw) &= |G(jw)| \angle \theta = |G(jw)| e^{j\theta} \\ G(-jw) &= |G(-jw)| \angle \theta = |G(jw)| e^{-j\theta} \\ \text{sen}(\alpha) &= \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j} \end{aligned}$$

e aplicando a transformada inversa de Laplace à equação (A.10) segue que:

$$y(t) = \frac{A}{2j} |G(jw_1)| e^{j\theta} \cdot e^{jw_1 t} - \frac{A}{2j} |G(jw_1)| e^{-j\theta} \cdot e^{-jw_1 t} + y_e(t)$$

Apêndice A Representação de sistemas dinâmicos

$$\begin{aligned} &= A|G(jw_1)|\left(\frac{e^{j(w_1t+\theta)} - e^{-j(w_1t+\theta)}}{2j}\right) + y_e(t) \\ &= A|G(jw_1)|\text{sen}(w_1t + \theta) + y_e(t) \end{aligned}$$

Como todos os pólos de $y_e(t)$ possuem parte real estritamente negativa, podemos concluir que este sinal é composto apenas por exponenciais estritamente decrescentes, onde se conclui que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_e(t) = 0$$

e logo se tem que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = A|G(jw_1)|\text{sen}(w_1t + \theta)$$

A partir deste fato podemos chegar à seguinte conclusão importante:

- a resposta *em regime permanente* de um sistema linear a uma entrada *sinal senoidal* (cossenoidal) de frequência ω será uma *senóide de mesma frequência*, porém deslocada em fase e com a amplitude modificada. O deslocamento de fase e a modificação da amplitude dependem unicamente do valor de $G(j\omega)$.

Apêndice B

Processos exemplos

Este apêndice descreve dois processos reais utilizados como exemplo ao longo do livro.

B.1 Processo térmico

O processo térmico consiste do controle da temperatura de uma resistência (variável de processo) através da tensão aplicada a essa resistência (variável manipulada). A temperatura é medida por um termopar tipo K e o processo é controlado por um controlador PID comercial. O controlador é digital com um período de amostragem de 200 ms e a atuação é implementada por PWM ligado à tensão da rede elétrica (127 V) com tempo de ciclo de 2,5 s. Um ventilador colocado próximo à resistência, que pode ser acionado em duas velocidades distintas, permite a aplicação de perturbações ao processo. O monitoramento e gerenciamento de ensaios é feito por um programa supervisor. Fotografias do processo são apresentadas nas Figuras B.1, B.2 e B.3.

A Figura B.1 apresenta uma vista superior do processo, onde podem ser observados a resistência e o termopar. Na Figura B.2 tem-se uma vista frontal do processo, onde são visíveis o painel com o controlador e as chaves de comando que permitem ligar o sistema e realizar perturbações (ligar e desligar o ventilador). Uma vista geral do sistema controlado por computador é apresentada na Figura B.3.

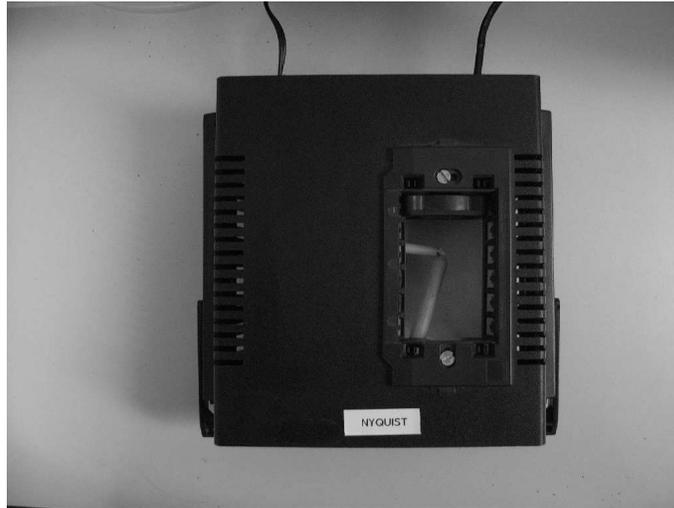


Figura B.1 - Processo térmico formado por resistência e termopar



Figura B.2 - Fotografia frontal do processo térmico, mostrando controlador PID comercial e chaves de comando

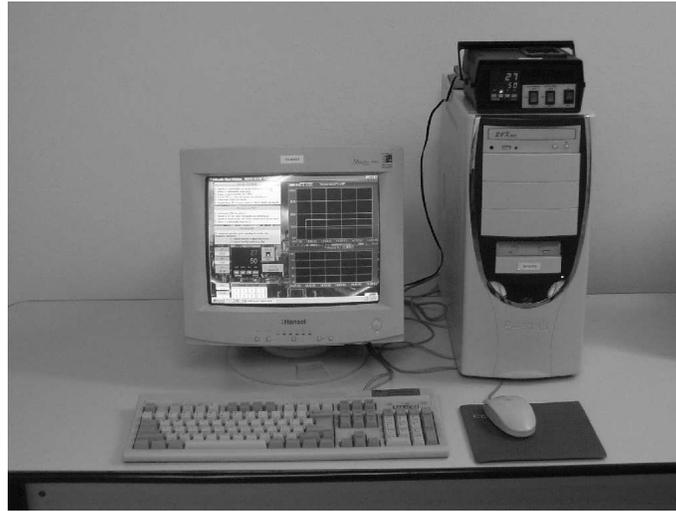


Figura B.3 - Processo térmico com supervisório rodando no computador

B.2 Controle de nível

Esse processo consiste no controle do nível de água em um tanque de formato cônico por meio de uma válvula. O processo é instrumentado com barramento *fieldbus* e o monitoramento e gerenciamento de ensaios é feito por um programa supervisório. Uma fotografia do processo de nível é apresentada na Figura B.4, onde podem ser vistos, além do tanque cônico cujo nível é controlado, um reservatório circular, bombas, válvulas e instrumentos, que podem ser utilizados para realizar controle de diversas variáveis nesse sistema. Para o controle de nível do tanque, a água circula entre o tanque e o reservatório, sendo bombeada por meio de uma bomba trifásica de 1/4 cv. A variável de processo é o nível de água no tanque cônico e a variável manipulada é a abertura da válvula de controle. A válvula de controle é mostrada na Figura B.5, onde podem ser vistos também seu posicionador, que é um servomecanismo com a função de estabelecer na válvula a abertura comandada, e um transmissor de posição.

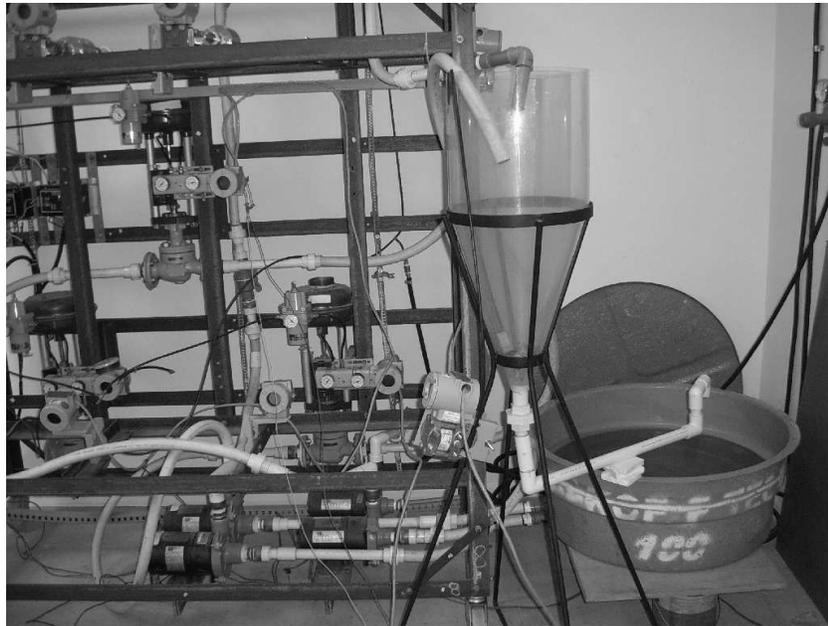


Figura B.4 - Tanque cônico, com reservatório, bombas e válvulas de controle

Apêndice B Processos exemplos

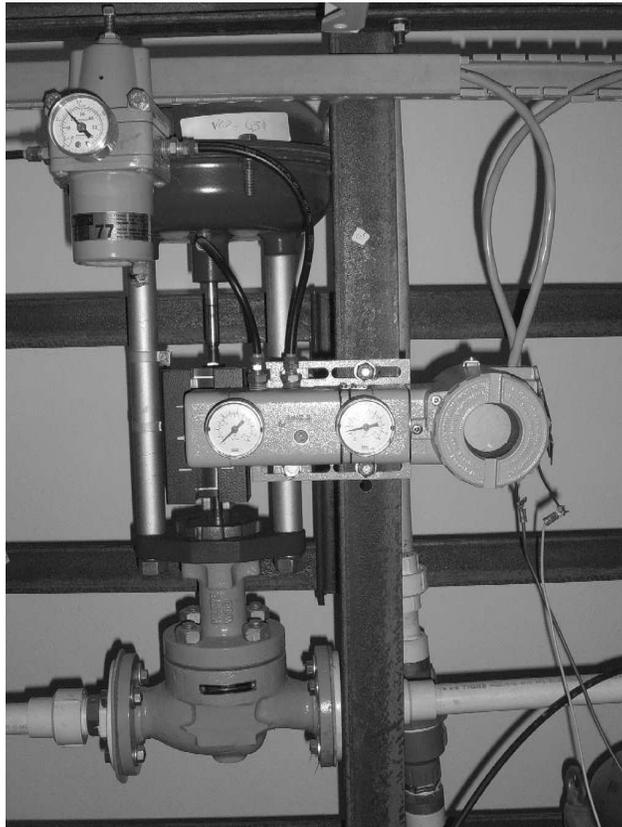


Figura B.5 - Válvula de controle com posicionador e transmissor