

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

EMERSON CHRIST BOEIRA

**SINTONIA DE CONTROLADORES
MULTIVARIÁVEIS PELO MÉTODO DA
REFERÊNCIA VIRTUAL COM
REGULARIZAÇÃO BAYESIANA**

Porto Alegre
2018

EMERSON CHRIST BOEIRA

**SINTONIA DE CONTROLADORES
MULTIVARIÁVEIS PELO MÉTODO DA
REFERÊNCIA VIRTUAL COM
REGULARIZAÇÃO BAYESIANA**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Controle e Automação

ORIENTADOR: Prof. Dr. Diego Eckhard

Porto Alegre
2018

EMERSON CHRIST BOEIRA

**SINTONIA DE CONTROLADORES
MULTIVARIÁVEIS PELO MÉTODO DA
REFERÊNCIA VIRTUAL COM
REGULARIZAÇÃO BAYESIANA**

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Orientador: _____

Prof. Dr. Diego Eckhard, UFRGS

Doutor pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul –
Porto Alegre, Brasil

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Gustavo Henrique da Costa Oliveira, UFPR

Doutor pela Universidade Estadual de Campinas – Campinas, Brasil

Prof. Dr. Alexandre Sanfelice Bazanella, UFRGS

Doutor pela Universidade Federal de Santa Catarina – Florianópolis, Brasil

Profa. Dra. Lucíola Campestrini, UFRGS

Doutora pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul – Porto Alegre, Brasil

Coordenador do PPGEE: _____

Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Jr.

Porto Alegre, outubro de 2018.

RESUMO

Este trabalho apresenta uma extensão à formulação multivariável do método de controle baseado em dados conhecido como o Método da Referência Virtual, ou *Virtual Reference Feedback Tuning* (VRFT). Ao lidar com processos onde o ruído é significativo, as formulações tradicionais do VRFT, por mínimos quadrados ou variáveis instrumentais, apresentam propriedades estatísticas insatisfatórias, que acabam levando o sistema de controle em malha fechada a desempenhos muito distantes daqueles especificados pelo projetista. Portanto, visando aprimorar a qualidade destas estimativas e, consequentemente, os desempenhos em malha fechada, esta dissertação propõe a adição de regularização no método VRFT para sistemas multivariáveis. Regularização é uma ferramenta que vem sendo amplamente utilizada e desenvolvida nos últimos anos nas comunidades de Identificação de Sistemas e *Machine Learning* e é indicada para reduzir a alta covariância que existe nas estimativas - problema que ocorre na formulação do VRFT com variáveis instrumentais. Também, como contribuições deste trabalho destacam-se uma análise mais detalhada do problema de identificação com regularização para sistemas multivariáveis, assim como o desenvolvimento da matriz ótima de regularização para este cenário e as propriedades da nova formulação do VRFT. Para demonstrar a eficiência desta nova formulação do VRFT são desenvolvidos exemplos numéricos.

Palavras-chave: Controle baseado em dados, VRFT, Regularização, Identificação de sistemas.

ABSTRACT

This work proposes a new extension for the multivariable formulation of the data-driven control method known as Virtual Reference Feedback Tuning. When the process to be controlled contains a significant amount of noise, the standard VRFT approach, that uses either the least squares method or the instrumental variable technique, yield estimates with very poor statistical properties, that may lead the control system to undesirable closed loop performances. Aiming to enhance these statistical properties and hence, the system's closed loop performance, this work proposes the use of regularization on the multivariable formulation of the VRFT method. Regularization is a feature that has been widely used and researched on the System Identification and Machine Learning communities on the last few years, and it is well suited to cope the high variance issue that emerge on the VRFT method with instrumental variable. Also, a more detailed analysis on the use of regularization for identification of multivariable systems, the proof of the optimal regularization matrix and the exposure of the new regularized VRFT properties can be highlighted as novelties of this work.

Keywords: Data-driven control, VRFT, Regularization, System identification.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1:	Diagrama do sistema em malha fechada.	17
Figura 2:	Diagrama da malha virtual do VRFT.	27
Figura 3:	Comparação de funções custo $J_y(\rho)$ e $J_{VR}^{SSO}(\rho)$ com e sem $F(q)$. . .	31
Figura 4:	Comparação dos custos $J_y(\hat{\rho})$ para o VRFT com mínimos quadrados (MQ) e o VRFT com variável instrumental (VI).	45
Figura 5:	Comparação das respostas em malha fechada nas 500 rodadas de Monte Carlo - VRFT com mínimos quadrados.	46
Figura 6:	Comparação das respostas em malha fechada nas 500 rodadas de Monte Carlo - VRFT com variáveis instrumentais.	47
Figura 7:	Projeções dos elipsoides nos planos \mathbb{P}_{11} e \mathbb{P}_{12} para cada técnica. . . .	47
Figura 8:	Projeções dos elipsoides no plano \mathbb{P}_{21} para cada técnica.	48
Figura 9:	Projeções dos elipsoides no plano \mathbb{P}_{22} para cada técnica.	48
Figura 10:	Comparação entre as funções densidade para a interpretação estocástica do procedimento de identificação. Em preto mostra-se $f(Y \theta)$, em azul a densidade a priori $f(\theta)$ e em vermelho a densidade a posteriori $f(\theta Y)$	59
Figura 11:	Função custo $J_{MQP}(\theta)$ para o exemplo numérico.	66
Figura 12:	Funções custo regularizadas para o exemplo numérico.	66
Figura 13:	Comparação dos custos $J_y(\hat{\rho})$ para as formulações tradicionais do VRFT MIMO (MQ e VI) e o VRFT com MQPR e diferentes parametrizações da matriz Π_{vr}	86
Figura 14:	Comparação dos custos $J_y(\hat{\rho})$ para as formulações tradicionais do VRFT MIMO (MQ e VI) e o VRFT com VI regularizada e diferentes parametrizações da matriz Π_{vr}	89
Figura 15:	Comparação das respostas em malha fechada nas 500 rodadas de Monte Carlo - VRFT com VI regularizada e parametrização do tipo DC.	90
Figura 16:	Projeções dos elipsoides nos planos \mathbb{P}_{11} e \mathbb{P}_{12} para as técnicas VRFT com VI (azul) e VRFT com VI regularizada e parametrização do tipo DC (laranja).	90
Figura 17:	Projeções dos elipsoides nos planos \mathbb{P}_{21} e \mathbb{P}_{22} para as técnicas VRFT com VI (azul) e VRFT com VI regularizada e parametrização do tipo DC (laranja).	91
Figura 18:	Comparação dos custos $J_y(\hat{\rho})$ para as formulações tradicionais do VRFT MIMO (MQ e VI) e o VRFT com MQPR e diferentes parametrizações da matriz Π_{vr} para o exemplo no qual $C_d(q) \notin \mathcal{C}$	93

Figura 19:	Comparação dos custos $J_y(\hat{\rho})$ para as formulações tradicionais do VRFT MIMO (MQ e VI) e o VRFT com VI regularizada e diferentes parametrizações da matriz Π_{vr} para o exemplo no qual $C_d(q) \notin \mathcal{C}$	94
Figura 20:	Comparação das respostas em malha fechada nas 500 rodadas de Monte Carlo - VRFT com MQ no exemplo em que $C_d(q) \notin \mathcal{C}$	95
Figura 21:	Comparação das respostas em malha fechada nas 500 rodadas de Monte Carlo - VRFT com VI no exemplo em que $C_d(q) \notin \mathcal{C}$	96
Figura 22:	Comparação das respostas em malha fechada nas 500 rodadas de Monte Carlo - VRFT com VI regularizada e parametrização do tipo DC no exemplo em que $C_d(q) \notin \mathcal{C}$	97

LISTA DE TABELAS

Tabela 1:	Comparação entre os valores de $J_y(\hat{\rho})$ e $\hat{\rho}$ obtidos no exemplo.	31
Tabela 2:	Comparação das médias obtidas para cada parâmetro nas abordagens tradicionais do VRFT, com MQ e VI, e na abordagem do MQPR com diferentes parametrizações de Π_{vr}	87
Tabela 3:	Comparação das medidas da matriz $\widehat{MSE}(\hat{\rho})$ para as abordagens tradicionais do VRFT, com MQ e VI, e para abordagem do MQPR com diferentes parametrizações de Π_{vr}	88
Tabela 4:	Comparação das medidas da matriz $\widehat{MSE}(\hat{\rho})$ para as abordagens tradicionais do VRFT, com MQ e VI, e para abordagem de VI regularizada com diferentes parametrizações de Π_{vr}	91

LISTA DE ABREVIATURAS

ARMAX	AutoRegressive Moving Average with eXogenous inputs
ARX	AutoRegressive with eXogenous inputs
CbT	Correlation-based Tuning
DDC	Data-Driven Control
FDT	Frequency Domain Tuning
FIR	Finite Impulse Response
IFT	Iterative Feedback Tuning
LIT	Linear Invariante no Tempo
LQG	Linear Quadratic Gaussian
LQR	Linear Quadratic Regulator
MAP	Maximum a Posteriori Estimate
MBC	Model-Based Control
MIMO	Multiple-Input Multiple-Output
MISO	Multiple-Input Single-Output
MPC	Model Predictive Control
MQ	Mínimos Quadrados
MQP	Mínimos Quadrados Ponderados
MQPR	Mínimos Quadrados Ponderados Regularizados
MSE	Mean Square Error
OCI	Optimal Controller Identification
SISO	Single-Input Single-Output
SNR	Signal-to-Noise Ratio
VDFT	Virtual Disturbance Feedback Tuning
VI	Variável Instrumental
VRFT	Virtual Reference Feedback Tuning

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	DEFINIÇÕES PRELIMINARES	14
2.1	O processo	14
2.2	O sistema de controle	16
2.2.1	Estruturas de controladores	17
2.2.2	Critérios de desempenho	19
2.3	O problema de controle por modelo de referência	20
2.3.1	Escolha do modelo de referência	21
2.4	Controle baseado em dados	22
2.5	Considerações finais	24
3	VIRTUAL REFERENCE FEEDBACK TUNING - VRFT	26
3.1	Formulação monovariável	26
3.1.1	Equivalência das funções custo e projeto do filtro	28
3.1.2	Exemplo ilustrativo	30
3.2	Formulação multivariável	32
3.2.1	Equivalência de funções custo e projeto do filtro	34
3.3	O uso de dados com ruído	36
3.3.1	Variáveis instrumentais	39
3.3.2	Exemplo motivacional	42
3.4	Considerações finais	47
4	IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS COM REGULARIZAÇÃO	50
4.1	Identificação pela abordagem clássica	51
4.1.1	O método dos mínimos quadrados ponderado - MQP	53
4.1.2	Propriedades da estimativa por MQP	54
4.2	Mínimos quadrados ponderados regularizado - MQPR	55
4.2.1	A interpretação Bayesiana	56
4.2.2	Estimando os hiperparâmetros	58
4.2.3	Propriedades da estimativa por MQPR	62
4.2.4	Matriz ótima de regularização Bayesiana	64
4.2.5	Exemplo ilustrativo	65
4.3	Considerações finais	67

5	VIRTUAL REFERENCE FEEDBACK TUNING COM REGULARIZAÇÃO BAYESIANA	69
5.1	Adicionando regularização no VRFT com mínimos quadrados	72
5.1.1	Estimativa do VRFT com MQPR	73
5.1.2	Polarização na estimativa do VRFT com MQPR	73
5.2	Adicionando regularização no VRFT com variáveis instrumentais	74
5.2.1	Estimativa do VRFT com VI regularizada	75
5.2.2	Propriedades do VRFT com VI regularizada	76
5.3	Escolha das matrizes de ponderação e regularização	78
5.3.1	Escolha baseada na interpretação Bayesiana	78
5.3.2	Estimativa e parametrização da matriz de regularização	82
5.4	Exemplos numéricos	84
5.4.1	Controlador ideal dentro da classe \mathcal{C}	85
5.4.2	Controlador ideal fora da classe \mathcal{C}	92
5.5	Considerações finais	95
6	CONCLUSÕES	98
	REFERÊNCIAS	100
	APÊNDICE A INTERPRETAÇÃO ESTOCÁSTICA DA IDENTIFICAÇÃO POR MQP	105

1 INTRODUÇÃO

As técnicas clássicas de controle para sistemas lineares, consolidadas ao final dos anos 1960 e conhecidas como técnicas de *controle moderno*, foram desenvolvidas com base na teoria de espaço de estados e utilizadas com sucesso em diversas aplicações, principalmente em sistemas aeroespaciais. As principais técnicas de projeto neste contexto consistem na alocação de polos e zeros, no controle linear quadrático (LQR - Linear Quadratic Regulator) ou controle linear quadrático Gaussiano (LQG - Linear Quadratic Gaussian) e no controle robusto. Todas estas diferentes metodologias são consideradas técnicas de *controle baseado em modelo*, ou MBC (Model-Based Control). Portanto, nas aplicações de MBC, a primeira etapa a ser realizada é a modelagem por meio de princípios físicos ou a identificação do processo que se deseja controlar. A partir do modelo obtido, então, o controlador é projetado (HOU; WANG, 2013).

Nas últimas décadas, com o avanço da tecnologia, principalmente da microeletrônica, dos dispositivos de medição e do baixo custo de computadores digitais, as aplicações de sistemas controle têm se tornado essenciais nas indústrias de processo contínuo, como as indústrias química, de celulose e papel, na metalurgia, nas refinarias de petróleo, entre outras. Atualmente, estas indústrias possuem produções e equipamentos que operam em larga escala e, inclusive, processos que apresentam a característica de interdependência entre suas variáveis, ou seja, processos multivariáveis (ou MIMO: Multiple-Input Multiple-Output). Por este motivo, a modelagem e/ou identificação destes processos se tornou uma tarefa complexa e custosa, além de muitas vezes resultar em modelos imprecisos. Dessa forma, aplicar as técnicas tradicionais de controle baseado em modelo nestes ambientes se tornou uma escolha pouco prática (HOU; WANG, 2013).

Ademais, grande parcela destes processos industriais possui aplicativos supervisórios que são responsáveis por monitorar e armazenar os dados coletados durante a operação e, com isto, uma grande quantidade de informações valiosas sobre os processos está disponível ao usuário. Deste modo, nestas aplicações, é conveniente sintonizar os controladores a partir dos dados disponíveis. Metodologias de controle com esta característica são pesquisadas na literatura desde o trabalho de (ZIEGLER; NICHOLS, 1942) e surgiram em maior número e com maior visibilidade a partir dos anos 1990, sendo denominadas como técnicas de *controle baseado em dados*, ou DDC (Data-Driven Control).

Entre as técnicas de controle baseado em dados, uma das mais populares é conhecida como Método da Referência Virtual (*Virtual Reference Feedback Tuning - VRFT*) (CAMPI; LECCHINI; SAVARESI, 2002). A grande vantagem desta metodologia é que a mesma está inserida no grupo de métodos *diretos* de controle baseado em dados, onde são utilizados somente dados de um (ou no máximo dois) experimento(s) para a sintonia dos controladores. Várias extensões para esta metodologia já foram propostas na literatura, onde se destaca aquela apresentada no trabalho (CAMPESTRINI et al., 2016), que trata

da formulação MIMO do problema. Por outro lado, existem as técnicas *iterativas* de controle baseado em dados, onde é necessária uma sequência de experimentos para refinar os parâmetros do controlador de forma iterativa. Entre estas, a mais popular e estudada na literatura é o Iterative Feedback Tuning (IFT) (HJALMARSSON et al., 1998).

É fato amplamente conhecido na comunidade de controle baseado em dados que as formulações tradicionais do método do VRFT, seja por mínimos quadrados, ou por variável instrumental, quando aplicadas a processos que apresentam presença significativa de ruído, produzem estimativas para o controlador que possuem propriedades estatísticas de baixa qualidade. A baixa qualidade destas estimativas resulta em uma perda considerável de desempenho nos sistemas de controle em malha fechada, chegando até a instabilizá-los em casos extremos. Esta característica das formulações tradicionais do VRFT é extremamente desvantajosa e torna o método pouco atrativo para aplicações em processos industriais, uma vez que os mesmos apresentam, em sua maioria, a presença de ruído e/ou distúrbios. Dessa forma, pode-se destacar que a principal motivação desta dissertação é enfrentar o problema de baixa qualidade das estimativas que resultam das formulações tradicionais do VRFT.

Assim sendo, de forma geral, esta dissertação tem como objetivo melhorar a qualidade das estimativas produzidas pelo VRFT MIMO, adicionando a ferramenta de regularização no método. A ideia de incluir regularização no VRFT já foi motivo de estudo em trabalhos anteriores (FORMENTIN; KARIMI, 2014; RALLO et al., 2016), onde os autores propuseram a utilização desta ferramenta na formulação monovariável (ou SISO: Single-Input Single-Output) do método, mais especificamente no VRFT com variáveis instrumentais. Nestes artigos, os autores demonstraram que é possível reduzir o problema de alta covariância do VRFT com variáveis instrumentais e, dessa forma, aprimorar o desempenho dos sistemas de controle resultantes. Esta dissertação, então, utiliza a ideia proposta em (RALLO et al., 2016), de utilizar uma regularização com base na interpretação Bayesiana para melhorar a qualidade das estimativas.

Contudo, apesar de apresentar resultados interessantes, o trabalho proposto no artigo (RALLO et al., 2016) introduz para o VRFT, sem muita argumentação e discussão, uma regularização idêntica àquela que vem sendo utilizada na comunidade de Identificação de Sistemas para resolver problemas de identificação com modelos do tipo FIR (Finite Impulse Response) de alta ordem. No entanto, como será discutido ao longo desta dissertação, o problema de identificação do controlador por meio do VRFT apresenta características diferentes dos problemas tradicionais de identificação de sistemas FIR e, portanto, não se pode empregar o mesmo tipo de regularização em ambos os problemas. Neste sentido, esta dissertação apresenta uma regularização mais coerente comparada àquela que fora proposta em (RALLO et al., 2016), visto que aqui, a escolha da matriz de regularização (etapa fundamental neste procedimento) é desenvolvida de forma mais sistemática e com base em uma interpretação estocástica do VRFT.

Isto posto, as principais contribuições da dissertação são destacadas na sequência. Pode-se ressaltar que a primeira contribuição desta dissertação é a análise das propriedades estatísticas das versões tradicionais do método VRFT. A partir desta análise, então, é possível demonstrar a baixa qualidade das estimativas do controlador pelo método VRFT, o que torna evidente a motivação deste trabalho. Visando melhorar estas propriedades, nesta dissertação são propostas duas novas formulações para o VRFT multivariável: o VRFT com mínimos quadrados regularizados (a qual é considerada uma extensão mais natural do problema) e o VRFT com variável instrumental regularizada (que por sua vez apresenta os melhores resultados). Ainda, além de propor estas duas novas formulações,

nesta dissertação a escolha da matriz de regularização é definida com base na interpretação Bayesiana do método VRFT e por isso, a regularização empregada nesta dissertação é denominada *regularização Bayesiana*. Também, outras contribuições desta dissertação consistem em uma análise mais detalhada do problema de identificação com regularização de modelos do tipo FIR multivariáveis, assim como a prova da matriz ótima de regularização neste cenário e a exposição das propriedades das novas formulações aqui proposta para o VRFT.

A dissertação está organizada como segue. O Capítulo 2 apresenta as definições básicas para o desenvolvimento do trabalho, onde são introduzidas as principais características dos sistemas aqui estudados, assim como uma pequena revisão bibliográfica sobre as técnicas controle baseado em dados. O Capítulo 3 apresenta as formulações tradicionais do método VRFT para o controle de processos SISO e MIMO, assim como a análise das propriedades estatísticas destas formulações. Já no Capítulo 4 o estado da arte de identificação com regularização é introduzido ao leitor, onde também é realizada a análise mais detalhada da identificação de modelos FIR para sistemas MIMO. O Capítulo 5, por sua vez, apresenta as novas formulações do VRFT com regularização Bayesiana. Inicialmente é apresentada a metodologia do VRFT por MQPR e, em seguida, mostra-se o VRFT com VI regularizada. Neste capítulo, estas diferentes formulações são testadas em exemplos numéricos. Por fim, o Capítulo 6 encerra o trabalho com as conclusões.

2 DEFINIÇÕES PRELIMINARES

Este capítulo apresenta definições básicas, porém fundamentais, para o desenvolvimento do trabalho. Primeiramente, o processo a ser controlado é definido, assim como algumas das características e propriedades fundamentais dos sinais que são considerados. Em seguida, é descrito e analisado o sistema de controle que será estudado, assim como os diferentes tipos de estruturas e os diversos critérios de desempenho que podem ser empregados neste sistema.

Na Seção 2.3 se discute o problema de controle por modelo de referência, visto que o método de ajuste que é o principal foco do trabalho busca resolver este problema. Apresentam-se o conceito de controlador ideal e também algumas diretrizes para a escolha do modelo de referência, dada a sua importância para garantir um problema bem formulado.

Por fim, apresenta-se o estado da arte de controle baseado em dados, ramo de pesquisa no qual este trabalho está inserido. Algumas das principais técnicas são descritas brevemente, com destaque para o Método da Referência Virtual, ou VRFT, visando contextualizar o trabalho aqui desenvolvido. Além disso, são mencionadas algumas aplicações práticas das diferentes técnicas.

2.1 O processo

No escopo deste trabalho são considerados processos de tempo discreto, lineares e invariantes no tempo com o mesmo número n de entradas e saídas, os quais podem ser descritos pela equação

$$y(t) = G_0(q)u(t) + v(t), \quad (1)$$

onde $t \in \mathbb{Z}$ representa a variável de tempo discreto, q é o operador de avanço no tempo, ou seja,

$$qx(t) = x(t + 1) \quad (2)$$

$$q^{-1}x(t) = x(t - 1), \quad (3)$$

$y(t) = [y_1(t), \dots, y_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de saídas, $u(t) = [u_1(t), \dots, u_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$ o vetor de entradas, $G_0(q)$ a matriz de transferência do processo e $v(t) = [v_1(t), \dots, v_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$ o vetor de ruído. O vetor de ruído é responsável por modelar comportamentos aleatórios que ocorrem no processo, como por exemplo, perturbações e erros de medição. Esse vetor é um *processo estocástico estacionário* que pode ser escrito por meio da seguinte relação:

$$v(t) = H_0(q)w(t), \quad (4)$$

onde $H_0(q)$ é a matriz de transferência do ruído e $w(t) = [w_1(t), \dots, w_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$ um vetor de ruído branco com média zero e matriz de covariância

$$E[w(t)w(t)^T] = \sigma_w^2 = \begin{bmatrix} \sigma_{w_1}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{w_2}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{w_n}^2 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

onde $E[\cdot]$ denota o operador esperança matemática. É importante ressaltar que a relação (4) não descreve todos os possíveis distúrbios que podem acontecer no processo, mas se mostra suficiente para uma ampla classe de problemas práticos (LJUNG, 1999).

As matrizes $G_0(q)$ e $H_0(q)$ são quadradas de dimensão $n \times n$ e seus elementos são funções racionais próprias, isto é, ambas representam sistemas causais. Ainda, considera-se que $H_0(\infty) = I$, sem perda de generalidade, uma vez que a matriz de covariância pode ser ajustada. Perceba que as definições acima são válidas tanto para sistemas monovariáveis, o que acontece quando $n = 1$, quanto para sistemas multivariáveis quadrados, que é o caso quando $n > 1$.

Como é possível notar, existe uma diferença na natureza dos sinais que estão presentes no sistema: enquanto $v(t)$ é um processo estocástico, $G_0(q)u(t)$ é um sinal determinístico. Para lidar com essa diferença e possibilitar uma análise mais ampla, com ambos os tipos de sinais, introduz-se, na sequência, o conceito de sinal *quasi-estacionário*:

Definição 2.1. (LJUNG, 1999) Um sinal $s(t) \in \mathbb{R}^n$ é dito *quasi-estacionário* se:

- (i) $E[s(t)] = m_s(t)$, $|m_s(t)| \leq C$, $\forall t$
- (ii) $E[s(t)s(r)^T] = R_s(t,r)$, $|R_s(t,r)| \leq C$, $\forall t$
- (iii) $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N R_s(t, t - \tau) = R_s(\tau)$, $\forall \tau$,

onde $R_s(\tau) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é conhecida como a matriz de autocorrelação do sinal *quasi-estacionário*.

Perceba que, se o sinal $s(t)$ é um processo estocástico estacionário, é fácil constatar que as condições acima são satisfeitas. Por outro lado, se $s(t)$ é puramente determinístico, então o operador esperança não tem efeito. Assim, dizer que o sinal é *quasi-estacionário* é equivalente a dizer que o mesmo é limitado e que o limite dado na condição (iii) existe. Sinais determinísticos periódicos, por exemplo, satisfazem as condições acima e portanto são *quasi-estacionários* (LJUNG, 1999).

Para facilitar a notação durante o desenvolvimento do trabalho, utiliza-se o operador $\bar{E}[\cdot]$, definido como

$$\bar{E}[f(t)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N E[f(t)], \quad (6)$$

o que permite escrever a matriz de autocorrelação da seguinte forma:

$$R_s(\tau) = \bar{E}[s(t)s(t - \tau)^T]. \quad (7)$$

Ainda, diz-se que dois sinais $s(t)$ e $x(t)$ são conjuntamente *quasi-estacionários* se ambos se encaixam na definição 2.1 e se a matriz de correlação cruzada

$$R_{sx}(\tau) = \bar{E}[s(t)x(t - \tau)^T] \quad (8)$$

existe. Se a matriz de correlação cruzada é nula, então os sinais são ditos *descorrelacionados* (LJUNG, 1999).

Um conceito explorado de forma recorrente nesta dissertação é o *espectro de potência* do sinal quasi-estacionário $s(t)$, denotado por $\Phi_s(\omega)$ e definido como (LJUNG, 1999)

$$\Phi_s(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_s(\tau) e^{-j\omega\tau}. \quad (9)$$

Essa ferramenta é útil na análise dos sinais no domínio da frequência e possui propriedades interessantes. Uma delas, conhecida como Teorema de Parseval, pode ser verificada pela transformada inversa de Fourier:

$$\bar{E}[||s(t)||_2^2] = \bar{E}\{tr[s(t)s(t)^T]\} = tr[R_s(0)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} tr[\Phi_s(\omega)] d\omega. \quad (10)$$

Também, é interessante analisar o efeito da filtragem linear nos espectros de potência, visto que este efeito será explorado em algumas situações nesta dissertação. Seja o sinal quasi-estacionário $s(t) \in \mathbb{R}^n$, com espectro $\Phi_s(\omega)$. Considere que o sinal $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é obtido por $x(t) = K(q)s(t)$, com $K(q)$ sendo uma matriz de transferência estável de dimensão $n \times n$. Então, o espectro de $x(t)$ será dado por (LJUNG, 1999)

$$\Phi_x(\omega) = K(e^{j\omega})\Phi_s(\omega)K(e^{j\omega})^H, \quad (11)$$

onde $K(e^{j\omega})$ é a resposta em frequência do filtro $K(q)$ e o sobrescrito H representa a matriz conjugada Hermitiana (ou conjugada transposta).

2.2 O sistema de controle

Com o objetivo de que o processo alcance um determinado requisito de desempenho, como por exemplo o seguimento de referências, rejeição de perturbações ou um determinado tempo de resposta, o sinal de entrada do processo é manipulado por meio de um controlador e o sistema é colocado em malha fechada para operação. Na literatura e nas vastas aplicações de controle, o sinal $u(t)$ pode ser calculado de inúmeras maneiras: pode ser, por exemplo, uma função não linear complexa, com algum tipo de algoritmo preditivo, o que é utilizado em algumas versões das técnicas MPC (do inglês, *Model Predictive Control*), ou um algoritmo de otimização que minimiza algum critério a cada instante de tempo, como nos sistemas de controle ótimo.

Neste trabalho, particularmente, são estudados os controladores lineares e invariantes no tempo (LIT). Dessa forma, o sinal de entrada do processo é escrito como

$$u(t, \rho) = C(q, \rho)[r(t) - y(t)], \quad (12)$$

onde $r(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de referências, o qual se assume ser descorrelacionado com o ruído do processo, i.e.

$$R_{rv}(\tau) = \bar{E}[r(t)v(t - \tau)^T] = 0, \quad \forall \tau, \quad (13)$$

e $C(q, \rho)$ é a matriz de transferência $n \times n$ do controlador, parametrizada pelo vetor $\rho \in \mathbb{R}^p$. Assim como nas definições anteriores, cada elemento de $C(q, \rho)$ também é uma função racional própria em q . Em outras palavras, a equação (12) mostra que o sinal de controle

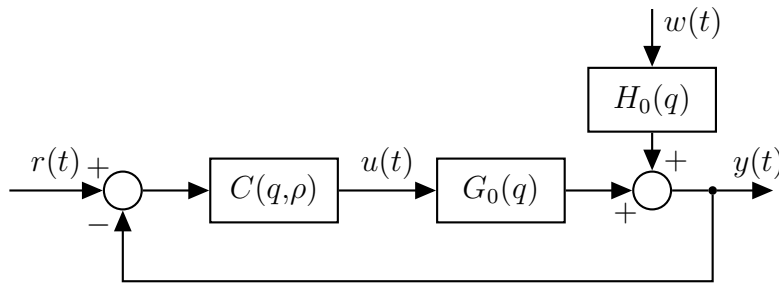


Figura 1: Diagrama do sistema em malha fechada.

pode ser interpretado como o sinal de erro $(r(t) - y(t))$ filtrado pela função de transferência do controlador. A Figura 1 ilustra o diagrama do sistema de controle em malha fechada descrito.

Para verificar o efeito do controlador na saída do sistema, a mesma é calculada a partir das expressões (1) e (12), resultando em

$$y(t, \rho) = T(q, \rho)r(t) + S(q, \rho)H_0(q)w(t) \quad (14)$$

$$S(q, \rho) = [I + G_0(q)C(q, \rho)]^{-1} \quad (15)$$

$$T(q, \rho) = [I + G_0(q)C(q, \rho)]^{-1}G_0(q)C(q, \rho) \quad (16)$$

$$T(q, \rho) = S(q, \rho)G_0(q)C(q, \rho) = G_0(q)C(q, \rho)S(q, \rho) \quad (17)$$

As funções de malha fechada $S(q, \rho)$ e $T(q, \rho)$ são conhecidas como *função de sensibilidade* e *função de sensibilidade complementar*, respectivamente, e mostram o efeito do controlador e do vetor de parâmetros ρ na saída do processo.

2.2.1 Estruturas de controladores

Antes de apresentar as técnicas de sintonia do controlador, é importante definir alguns aspectos em relação às estruturas que serão utilizadas. Para tanto, considera-se que o controlador $C(q, \rho)$ tem o seguinte formato multivariável:

$$C(q, \rho) = \begin{bmatrix} C_{11}(q, \rho_{11}) & C_{12}(q, \rho_{12}) & \dots & C_{1n}(q, \rho_{1n}) \\ C_{21}(q, \rho_{21}) & C_{22}(q, \rho_{22}) & \dots & C_{2n}(q, \rho_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1}(q, \rho_{n1}) & C_{n2}(q, \rho_{n2}) & \dots & C_{nn}(q, \rho_{nn}) \end{bmatrix}, \quad (18)$$

onde $\rho = [\rho_{11}^T \ \rho_{12}^T \ \dots \ \rho_{1n}^T \ \rho_{21}^T \ \rho_{22}^T \ \dots \ \rho_{2n}^T \ \dots \ \rho_{nn}^T]^T$ e cada $\rho_{ij} \in \mathbb{R}^{\rho_{ij}}$. As técnicas de controle exploradas neste trabalho consideram que o controlador tem uma estrutura fixa, escolhida *a priori* pelo usuário, e que seus parâmetros é que são as variáveis a serem determinadas. Isso significa que cada subcontrolador $C_{ij}(q, \rho_{ij})$ possui uma ordem fixa (número fixo de polos e zeros). A estrutura escolhida pelo projetista é conhecida como *classe C*:

$$\mathcal{C} = \{C(q, \rho) : \rho \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^p\}, \quad (19)$$

onde Ω é o conjunto admissível de parâmetros. Se Ω não é especificado em um problema, pode-se considerar que $\Omega = \mathbb{R}^p$ (BAZANELLA; CAMPESTRINI; ECKHARD, 2012). É importante destacar que cada subcontrolador pode ter uma estrutura diferente, desde que seja fixa.

Além disso, para facilitar o problema de síntese, considera-se nesta dissertação que cada subcontrolador é parametrizado linearmente, ou seja, pode ser escrito do seguinte modo:

$$C_{ij}(q, \rho_{ij}) = \rho_{ij}^T \bar{C}(q), \quad (20)$$

onde $\bar{C}(q)$ é um vetor de funções de transferência de dimensão p_{ij} . Exemplos de controladores que se enquadram nesta classe são os controladores PI e PID, amplamente conhecidos e utilizados em aplicações industriais. Considere o exemplo a seguir do controlador PID digital:

$$C(q, \rho) = \rho_1 + \rho_2 \frac{q}{q-1} + \rho_3 \frac{q-1}{q}, \quad (21)$$

escrevendo-o como em (20), tem-se

$$C(q, \rho) = \rho^T \bar{C}(q) \quad (22)$$

$$\rho = [\rho_1 \quad \rho_2 \quad \rho_3]^T \quad (23)$$

$$\bar{C}(q) = \left[1 \quad \frac{q}{q-1} \quad \frac{q-1}{q} \right]^T. \quad (24)$$

A princípio a escolha de lidar somente com controladores lineares nos parâmetros pode parecer bastante restritiva. No entanto, cabe destacar que qualquer função de transferência dependente de ρ pode ser aproximada por uma função na forma de (20) e, portanto, não há grande perda de generalidade com esta escolha (BAZANELLA; CAMPESTRINI; ECKHARD, 2012).

Outro aspecto a destacar é que, com a parametrização linear, a escolha da classe \mathcal{C} de controladores implica que o usuário deve fixar, além da ordem do controlador, os polos do mesmo, deixando somente os zeros livres para a sintonia. Geralmente o usuário escolhe o denominador (ou os polos) dos controladores de acordo com a referência que deseja seguir e/ou perturbações que deseja rejeitar, utilizando o princípio do modelo interno. Se a intenção é o seguimento ou a rejeição de um sinal constante ou do tipo salto, por exemplo, então o denominador deve possuir o fator $(q-1)$, como o é o caso do controlador PID mencionado acima. Por outro lado, se a intenção é seguir ou rejeitar um sinal senoidal, o denominador do controlador deve conter polos complexos conjugados com a mesma frequência da senoide em questão. Controladores que possuem esta característica são conhecidos como controladores ressonantes e são muito utilizados em controle de sistemas ininterruptos de energia (PEREIRA et al., 2014; CORLETA et al., 2016), por exemplo.

No caso multivariável, ainda, há outra escolha que pode ser feita em relação a estrutura do sistema de controle. Pode-se decidir entre utilizar o controle descentralizado ou o centralizado. Em estruturas descentralizadas, o controlador possui somente os termos da diagonal da matriz de transferência. Este é o tipo preferido de estrutura em ambientes industriais, visto que existem menos parâmetros para a sintonia, tornando-a mais simples e direta. Alguns métodos mais primitivos de ajuste de controladores PID descentralizados, baseados no experimento do relé, por exemplo, podem ser vistos em (SIRISENA; HANG; VASNANI, 1992; LOH; VASNANI, 1994; HALEVI; PALMOR; EFRATI, 1997), enquanto um método mais consistente é apresentado em (CAMPESTRINI; STEVANATTO FILHO; BAZANELLA, 2009), onde uma aplicação do mesmo em um sistema de controle de nível é exibida em (BOEIRA et al., 2018).

Porém, o controle descentralizado só consegue atingir requisitos mais rígidos de desempenho se o processo $G_0(q)$ é desacoplado ou quase desacoplado. Neste caso, o sistema

é praticamente composto por um conjunto de subprocessos independentes e os controladores podem até ser projetados separadamente. Por outro lado, quando os elementos fora da diagonal principal de $G_0(q)$ têm grande importância no processo, então existe uma alta interação entre os subprocessos, tornando o controle descentralizado menos eficaz. Nestas situações, portanto, prefere-se o controle centralizado (SKOGESTAD, 2007).

2.2.2 Critérios de desempenho

Para avaliar o desempenho do sistema de controle em malha fechada existem diferentes critérios que podem ser utilizados. Os mais objetivos e sofisticados são aqueles expressos por alguma norma de um sinal presente no sistema de controle, visto que proporcionam uma medida quantitativa (BAZANELLA; CAMPESTRINI; ECKHARD, 2012). A norma mais utilizada para este fim é a norma \mathcal{L}_2 , que para um vetor de sinais $s(t)$ é dada por (ZHOU et al., 1996)

$$\|s(t)\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n \|s_i(t)\|_2^2 \right)^{1/2}, \quad (25)$$

com a norma do sinal (escalar) $s_i(t)$ sendo:

$$\|s_i(t)\|_2^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [s_i(t)]^2. \quad (26)$$

Quando a mesma é utilizada, diz-se que o critério de desempenho é um critério H_2 . Na seqüência, são apresentados diferentes critérios de desempenho H_2 e seus objetivos.

Primeiramente, considere o problema de seguimento de referência, onde não se leva em conta o efeito de perturbações e/ou o efeito do ruído. Deseja-se que a saída do processo possua um comportamento mais próximo possível da referência que foi definida. No entanto, exigir que a saída se comporte de forma idêntica à referência é, de certa forma, irrealista, pois o seguimento perfeito é praticamente impossível (BAZANELLA; CAMPESTRINI; ECKHARD, 2012). Assim sendo, o objetivo de seguimento pode ser relaxado por meio de uma matriz de transferência que expressa um comportamento desejado em malha fechada. Esta matriz é denominada *modelo de referência* e denotada pelo símbolo $T_d(q)$. O critério de seguimento do modelo de referência, simbolizado por $J_y(\rho)$, pode ser escrito da seguinte forma:

$$J_y(\rho) = \bar{E} [\|y_r(t, \rho) - y_d(t)\|_2^2], \quad (27)$$

$$y_d(t) = T_d(q)r(t), \quad (28)$$

$$y_r(t) = T(q, \rho)r(t). \quad (29)$$

Reforçando o que foi dito antes, a equação (27) mede a diferença entre a saída desejada e a saída obtida com o controlador $C(q, \rho)$. Quanto menor este valor, mais próximo se está da saída desejada.

Existem diversos métodos para o projeto de controladores que visam minimizar o critério (27), inclusive aquele que é o principal foco deste trabalho. Portanto, a ideia geral destes métodos será discutida na próxima seção.

Além do seguimento de referência, pode-se medir o efeito independente que o ruído do processo causa no sistema de controle. Para isso, considere a parcela da saída em malha fechada que é consequência de $v(t)$:

$$y_e(t, \rho) = S(q, \rho)v(t). \quad (30)$$

O critério H_2 de rejeição ao ruído, denotado por $J_e(\rho)$ é dado pelo tamanho do sinal expresso em (30):

$$J_e(\rho) = \bar{E}[\|S(q,\rho)v(t)\|_2^2]. \quad (31)$$

Perceba que aqui não foi feito um relaxamento do critério como no caso de seguimento de referência, mesmo sabendo que é impossível atingir $J_e(\rho) = 0$. Isso se deve ao fato de que escolher uma função de sensibilidade desejada não é uma tarefa tão simples. Também, uma vez que não se conhece o sinal $v(t)$, usar um modelo de sensibilidade desejada torna uma possível otimização deste critério mais complexa (BAZANELLA; CAMPESTRINI; ECKHARD, 2012).

Combinando os critérios acima, pode-se definir o critério H_2 de desempenho composto ou $J_t(\rho)$, que leva em consideração tanto o seguimento de referência, quanto o efeito do ruído:

$$J_t(\rho) = J_y(\rho) + J_e(\rho) \quad (32)$$

$$J_t(\rho) = \bar{E}[\|y(t,\rho) - y_d(t)\|_2^2]. \quad (33)$$

Do ponto de vista de aplicações práticas de controle, onde geralmente há presença do ruído e não se consegue separar o seu efeito da saída do processo, este é o critério mais conveniente e o único que pode ser computado diretamente.

Por fim, outro o critério de desempenho que pode ser medido na malha fechada é o esforço de controle, dado pela normal do sinal $u(t)$:

$$J_u(\rho) = \bar{E}[\|u(t,\rho)\|_2^2]. \quad (34)$$

Este critério é muitas vezes usado em problemas de controle baseados em otimização, combinado dos outros critérios apresentados anteriormente. Neste trabalho $J_u(\rho)$ terá menor destaque, uma vez que o esforço de controle pode ser minimizado de forma indireta com a escolha de um modelo de referência mais conservador.

2.3 O problema de controle por modelo de referência

O problema de controle por modelo de referência busca minimizar o critério descrito na equação (27), ou seja, minimizar a diferença entre o comportamento desejado e o comportamento obtido com o controlador $C(q,\rho)$. Isto posto, os parâmetros podem ser calculados resolvendo o seguinte problema de otimização:

$$\hat{\rho} = \arg \min_{\rho} J_y(\rho). \quad (35)$$

Destaca-se que este problema é não convexo, e por isso pode possuir diversos mínimos locais, dificultando sua solução.

O controlador que leva o sistema a atingir exatamente o comportamento especificado pelo modelo de referência é chamado de *controlador ideal*, ou $C_d(q)$. Quando este controlador é inserido na malha de controle, a função objetivo $J_y(\rho)$ apresentará o mínimo valor possível, que é zero. O controlador ideal pode ser calculado ao se substituir $T(q,\rho)$ por $T_d(q)$ em (17) e isolar o controlador na equação:

$$C_d(q) = G_0(q)^{-1}T_d(q)[I - T_d(q)]^{-1}. \quad (36)$$

Nota-se que, se o modelo do processo é conhecido, $C_d(q)$ pode ser calculado diretamente por (36). Um importante fato a ser destacado é que se a classe \mathcal{C} de controladores definida pelo usuário engloba o controlador ideal, então diz-se que o *controlador ideal pertence à classe \mathcal{C}* . Neste cenário, pode-se dizer que existe um vetor de parâmetros ideal, ou seja, que o controlador ideal pode ser escrito como $C_d(q) = C(q, \rho_0)$. A premissa a seguir resume estas afirmativas.

Premissa 2.1. $C_d(q) \in \mathcal{C}$ então $\exists \rho_0 : C_d(q) = C(q, \rho_0)$.

A princípio, pode parecer difícil satisfazer a premissa anterior. No entanto, para problemas de controle por modelo de referência bem formulados, a premissa geralmente é satisfeita ou violada de forma tênue, i.e., o controlador ideal não apresenta a mesma estrutura da classe \mathcal{C} , predefinida pelo usuário, mas sim uma estrutura similar. Quando $C_d(q) \notin \mathcal{C}$, a classe de controladores não é representativa o suficiente para o modelo de referência escolhido (GONÇALVES DA SILVA, 2016). Assim, nota-se que um aspecto crítico para a boa formulação do problema é a escolha do modelo de referência, baseada em algumas informações básicas sobre a dinâmica do processo a ser controlado, e a escolha da classe/estrutura de controladores que será utilizada.

2.3.1 Escolha do modelo de referência

A primeira preocupação ao se projetar o modelo de referência é que o mesmo seja escolhido de forma a garantir a causalidade do controlador ideal, para que este não seja muito distante da classe \mathcal{C} especificada. Para o caso SISO este projeto é praticamente trivial, o que já não é verdade para o caso MIMO. Outra preocupação é garantir a estabilidade interna no sistema de controle, ou seja, que todos os sinais presentes no mesmo sejam limitados. Isto posto, os trabalhos (GONÇALVES DA SILVA, 2016; GONÇALVES DA SILVA; BAZANELLA; CAMPESTRINI, 2018) abordam o problema da escolha do modelo de referência para sistemas MIMO de forma que $C_d(q)$ resultante possua essas importantes propriedades. Baseado neste trabalho, algumas diretrizes para a escolha de $T_d(q)$ são apresentadas na sequência. Contudo, para uma análise mais aprofundada, inclusive com um enfoque na escolha do modelo de referência para sistemas com controladores PID, recomenda-se a leitura de (GONÇALVES DA SILVA; BAZANELLA; CAMPESTRINI, 2018).

Primeiramente, discute-se a estrutura da matriz $T_d(q)$. A escolha mais simples e intuitiva é definir os elementos fora da diagonal principal como zero e determinar modelos de referência monovariáveis para cada saída, ou seja, escolhe-se um sistema desacoplado. Contudo, esta escolha pode resultar em controladores ideais muito distantes daqueles que serão utilizados pelo usuário, o que pode causar desempenhos insatisfatório no sistema em malha fechada. Se for definida uma estrutura de controle centralizada, então a escolha acima pode ser realizada sem maiores consequências. Por outro lado, se o usuário deseja projetar um sistema com controle descentralizado, então não se recomenda escolher $T_d(q)$ diagonal. Neste caso, o modelo de referência deve ser cheio, levando em conta o acoplamento que irá ocorrer entre as malhas.

Para sistemas que apresentam zeros de transmissão de fase não mínima, ainda, é necessário conhecer a posição e direção do zero para incluí-lo no modelo de referência. Se o desempenho de alguma das saídas é um fator crítico e não pode lidar com a presença do zero de fase não mínima, por exemplo, ainda é possível direcionar seu efeito para uma outra saída, conforme é demonstrado em (GONÇALVES DA SILVA, 2016).

Além da estrutura, existem limitações em relação ao desempenho que pode ser definido no modelo de referência. Para ser capaz de definir uma $T_d(q)$ coerente, o usuário não precisa conhecer um modelo completo do processo, mas sim algumas características básicas e de fácil obtenção. É importante, por exemplo, conhecer o atraso (grau relativo) da planta, ou pelo menos um limite superior para o mesmo, pois tal informação está relacionada com a limitação do tempo de acomodação do que se pode atingir no sistema em malha fechada.

2.4 Controle baseado em dados

As técnicas de controle baseado em dados diferem das técnicas clássicas de controle, baseadas em modelo, pois não necessitam de um modelo matemático do processo. Note, por exemplo, que se o modelo $G_0(q)$ do processo fosse conhecido, seria fácil calcular o controlador para resolver o problema de modelo de referência por meio de (36). Além disso, esses métodos não têm como objetivo determinar livremente uma função de transferência para o controlador. De outro modo, buscam sintonizar os parâmetros de um controlador com estrutura fixa e predefinida pelo usuário, a partir de um conjunto de dados Z^N de entrada e saída coletados do processo:

$$Z^N = [y(1), u(1), y(2), u(2), \dots, y(N), u(N)], \quad (37)$$

com N sendo a quantidade de dados. Após a coleta de dados resolve-se um problema de minimização de um dos critérios de desempenho definidos na Subseção 2.2.2 (BAZANELLA; CAMPESTRINI; ECKHARD, 2012). Existe uma ampla literatura sobre o assunto e diversas técnicas diferentes de controle baseado em dados. As principais são brevemente discutidas a seguir, com o intuito de melhor contextualizar o trabalho.

Entre as técnicas de controle baseado em dados, existem dois grupos distintos: o grupo dos métodos iterativos, que utilizam uma sequência de experimentos para atualizar os parâmetros do controlador de forma iterativa, e o grupo dos métodos diretos, que necessitam de apenas uma ou duas bateladas de dados para a sintonia. Nos algoritmos iterativos, geralmente, emprega-se o algoritmo do gradiente para minimizar o critério escolhido. Assim, a cada iteração, os parâmetros são calculados por

$$\rho_{i+1} = \rho_i - \gamma_i \nabla J(\rho_i), \quad (38)$$

com $\nabla J(\rho) = \frac{\partial J(\rho)}{\partial \rho}$ e $\gamma_i > 0$. Este é o algoritmo favorito na literatura pois precisa de menos informações em relação a outros: só é necessário o gradiente da função objetivo e o tamanho do passo da iteração. Por outro lado, se o algoritmo de Newton é utilizado na otimização, então é necessária uma estimativa da matriz Hessiana, o que implicaria em realizar experimentos mais complexos, que contêm mais informações (ECKHARD; BAZANELLA, 2012).

A grande vantagem dos métodos iterativos é a segurança de operação, visto que a cada passo ocorre uma pequena variação dos parâmetros do controlador, mantendo o processo bem comportado, próximo do que já se tinha. No entanto, a principal desvantagem destes procedimentos é a grande quantidade de experimentos que devem ser realizados no processo até que o seja alcançada a convergência do algoritmo. Outro ponto negativo é o fato de que os algoritmos de otimização podem convergir para mínimos locais da função objetivo. Entre os métodos iterativos, os mais conhecidos são o *Iterative Feedback Tuning* (IFT), o *Frequency Domain Feedback Tuning* (FDT) e o *Correlation-based Tuning* (CbT).

O IFT é uma das técnicas mais conhecidas e desenvolvidas na comunidade de controle baseado em dados. Foi proposto inicialmente para o caso SISO em (HJALMARSSON; GUNNARSSON; GEVERS, 1994) e aprofundado em (HJALMARSSON et al., 1998). Uma versão do IFT para sistemas de controle em cascata é encontrado em (TESCH; ECKHARD; BAZANELLA, 2016). Extensões para o caso de sistemas MIMO são apresentadas em (DE BRUYNE, 1997; HJALMARSSON; BIRKELAND, 1998), com uma versão mais eficiente elaborada em (HJALMARSSON, 1999). O IFT e suas diferentes versões já foram utilizados em inúmeras aplicações, como um sistema de tratamento térmico (EL-AWADY; HANSSON; WAHLBERG, 1999), uma máquina de corte de chapas metálicas (GRAHAM; YOUNG; XIE, 2007) e até no controle de quadricópteros (TESCH; ECKHARD; GUARIENTI, 2016). A principal ideia do IFT é minimizar o critério $J_t(\rho)$, descrito em (33), ou seja, ele minimiza um meio termo entre seguimento do modelo de referência assim como rejeição do ruído. A minimização é feita por meio do algoritmo do gradiente, onde o mesmo é estimado através dos experimentos desenvolvidos em malha fechada no processo.

O FDT, introduzido em (KAMMER; BITMEAD; BARTLETT, 2000), por sua vez, busca minimizar o critério $J_e(\rho)$, dado por (31), desconsiderando o problema de seguimento de referência. Nesta técnica são propostos estimadores para o gradiente da função custo e para a matriz Hessiana da função objetivo, com base em uma análise no domínio da frequência. Com a informação da matriz Hessiana, o método de Newton também pode ser utilizado no problema de otimização proposto.

A técnica CbT iterativa foi proposta originalmente para sistemas SISO em (KARIMI; MIŠKOVIĆ; BONVIN, 2004) e estendida para o caso MIMO em (MIŠKOVIĆ et al., 2007). Uma aplicação do método para um sistema de suspensão magnética pode ser vista em (KARIMI; MIŠKOVIĆ; BONVIN, 2003). O CbT tem um objetivo um pouco diferente daqueles apresentados anteriormente, ao invés de minimizar um dos critérios descrito em 2.2.2, o mesmo busca minimizar a correlação cruzada entre o sinal de referência e o erro entre a saída desejada e a saída real do sistema. Com isto, a técnica consegue que o sistema em malha fechada adquira a dinâmica do modelo de referência e para tanto, também faz o uso do algoritmo do gradiente.

Em alternativa, os métodos diretos de controle baseado em dados não utilizam informações sobre o vetor gradiente e a matriz Hessiana dos critérios com relação aos parâmetros. Portanto, sua grande vantagem é que necessitam de poucos experimentos para sintonizar o controlador. Já o que pode ser visto como uma desvantagem destes métodos é a mudança brusca dos parâmetros no sistema, que em alguns casos, pode causar perturbações indesejadas. Entre as técnicas diretas mais conhecidas estão uma versão não iterativa do CbT (KARIMI; VAN HEUSDEN; BONVIN, 2007) (SISO) e (YUBAI; USAMI; HIRAI, 2009) (MIMO), o *Virtual Reference Feedback Tuning* (VRFT) (CAMPI; LECCHINI; SAVARESI, 2002) e o *Optimal Controller Identification* (OCI) (CAMPES-TRINI et al., 2017).

Principal foco desta dissertação, o VRFT é o método direto mais difundido e pesquisado, possuindo várias extensões e análises acerca de suas propriedades. O mesmo foi desenvolvido originalmente para sistemas lineares monovariáveis em (CAMPI; LECCHINI; SAVARESI, 2002), onde a principal ideia é reescrever o critério $J_y(\rho)$, dado por (27), em uma outra perspectiva, tornando mais simples a tarefa de encontrar uma solução para o problema de otimização. O método foi aplicado inúmeras vezes em problemas práticos. Como exemplo, pode-se citar o controle de uma suspensão ativa (CAMPI; LECCHINI; SAVARESI, 2003), o controle de neuropróteses (PREVIDI et al., 2004), entre

outros presentes na literatura. Em relação a extensões, o trabalho (VAN HEUSDEN; KARIMI; BONVIN, 2011) mostra uma formulação do VRFT com restrições que garantem a estabilidade do sistema em malha fechada. Em (CAMPESTRINI et al., 2011) o VRFT SISO foi expandido para lidar com plantas de fase não mínima. Uma aplicação deste em um sistema de controle de nível pode ser vista em (SCHEID FILHO et al., 2016). Em artigos mais recentes (FORMENTIN; KARIMI, 2014; RALLO et al., 2016), são apresentadas novas formulações do método com o objetivo de melhorar suas propriedades estatísticas. Já em (ECKHARD; CAMPESTRINI; BOEIRA, 2018) é apresentada uma metodologia semelhante a do VRFT para lidar com rejeições a perturbações.

Em relação ao controle de processos multivariáveis, a primeira extensão do VRFT foi apresentada em (NAKAMOTO, 2004), onde o método também é aplicado a um sistema de resfriamento. Já em (FORMENTIN; SAVARESI; DEL RE, 2012), o VRFT MIMO é analisado de forma mais aprofundada e estendido para o caso de sistemas com ruído, onde a metodologia proposta também é aplicada a um sistema real, desta vez no controle de injeção de um motor a diesel. Contudo, as metodologias propostas por esses trabalhos apresentam uma desvantagem significativa: para obter uma estimativa não polarizada dos parâmetros do controlador, é necessário que o modelo de referência seja diagonal e prescreva o mesmo desempenho para todas as saídas. Note que esta é uma condição bastante restritiva e irrealista. Se as variáveis controladas são de diferentes grandezas, por exemplo, é muito exigente definir que as mesmas possuam o mesmo comportamento.

Assim sendo, com o intuito de solucionar este problema, o trabalho (CAMPESTRINI et al., 2016) propõe uma metodologia que permite uma escolha mais ampla de modelos de referência, além de apresentar uma aplicação desta metodologia a um sistema de controle de nível. Como extensão deste último, uma versão para o caso de sistemas de fase não mínima pode ser vista em (GONÇALVES DA SILVA; CAMPESTRINI; BAZANELLA, 2018). O principal objetivo desta dissertação consiste em melhorar as propriedades estatísticas da formulação do VRFT MIMO proposta em (CAMPESTRINI et al., 2016), empregando uma ideia semelhante àquela que foi desenvolvida em (RALLO et al., 2016): adicionando uma regularização baseada na interpretação Bayesiana do VRFT.

Por fim, uma técnica direta de controle baseado em dados mais recente foi proposta em (CAMPESTRINI et al., 2017), denominada OCI. Esta técnica também busca minimizar o critério $J_y(\rho)$ e o faz por meio da identificação do controlador ideal, usando algoritmos mais avançados de minimização do erro de predição. Comparado ao VRFT, as estimativas do controlador com esta técnica apresentam melhores propriedades ao custo de resolver um problema de otimização consideravelmente mais complexo. A versão multivariável da técnica foi expandida em (HUFF, 2016; HUFF; GONÇALVES DA SILVA; CAMPESTRINI, 2018), onde também se mostra a aplicação da mesma em um sistema de controle de nível.

2.5 Considerações finais

Este capítulo introduziu as definições básicas que serão usadas durante o trabalho. O processo multivariável que será controlado foi apresentado, assim como os sinais que são estudados e suas características. Neste sentido, foi introduzido o conceito de sinal quasi-estacionário, que permite a análise de sinais estocásticos estacionários e determinísticos no mesmo contexto. Também, definiu-se o espectro dos sinais quasi-estacionários, assim como suas propriedades.

Na Seção 2.2 foi descrito o tipo de sistema de controle que será aqui analisado e sin-

tetizado, onde o controlador é LIT, possui uma estrutura fixa predefinida pelo usuário e é parametrizado linearmente. Comentou-se a respeito da escolha entre controle descentralizado ou centralizado e quais as situações mais adequadas para cada estrutura. Os critérios de desempenho baseados nas normas \mathcal{L}_2 dos sinais presentes no sistema também foram explicados nesta seção.

Em 2.3 foi apresentado o problema de controle por modelo de referência, que propõe a minimização do critério $J_y(\rho)$, assim como o conceito de controlador ideal e quando pode-se considerar válida a Premissa 2.1. Dada a importância da escolha de $T_d(q)$, algumas diretrizes para sua escolha foram comentadas, visando garantir características fundamentais para o controlador ideal e, conseqüentemente, uma boa formulação para o problema.

Finalmente, a Seção 2.4 contextualizou o estado da arte na área de controle baseado em dados, onde primeiro se discutiu a ideia principal destas metodologias, que consiste em sintonizar controladores sem um modelo matemático do processo, utilizando um conjunto de dados coletados Z^N e a otimização de algum critério de desempenho. Na sequência, os métodos foram separados em dois grupos distintos: os iterativos e os diretos e suas principais vantagens e desvantagens foram apontadas. Também os métodos mais relevantes foram descritos, assim como algumas de suas extensões e aplicações práticas. O enfoque foi dado nas características e extensões do VRFT, uma vez que este é o principal assunto desta dissertação.

3 VIRTUAL REFERENCE FEEDBACK TUNING - VRFT

Conforme já discutido no capítulo anterior, o VRFT é um método direto de controle baseado em dados que busca sintonizar parâmetros do controlador sem uma etapa de modelagem ou identificação, usando apenas o conjunto de dados Z^N de entradas e saídas, coletado do processo. Os dados são obtidos em um único experimento, sem a necessidade de realizar um procedimento iterativo na sintonia. Os controladores ajustados são lineares e invariantes no tempo e sua estrutura é definida previamente pelo usuário. Através do VRFT, procura-se minimizar o critério H_2 de seguimento do modelo de referência, definido anteriormente como $J_y(\rho)$. No entanto, minimizar diretamente a função $J_y(\rho)$ pode ser um trabalho árduo, visto que a mesma é não convexa e pode possuir mínimos locais. Assim sendo, a metodologia proposta pelo VRFT consiste em realizar a otimização de um critério diferente, denominado $J_{VR}(\rho)$. Sob condições ideais, este critério possui o mesmo mínimo de $J_y(\rho)$. Fora do caso ideal, para possibilitar uma sintonia apropriada, é necessário aproximar ambos os critérios, o que é realizado por meio do projeto de um filtro.

Este capítulo descreve as formulações mais relevantes do VRFT, desenvolvidas na literatura, para o contexto desta dissertação. Inicialmente a formulação original (monovariável) é apresentada. Por ser mais simples e intuitiva, é a mais pertinente para introduzir o tema ao leitor. Posteriormente, se considera o caso multivariável, onde existem duas principais formulações. Mostra-se que a primeira é derivada a partir de algumas suposições muito restritivas e, portanto, o trabalho faz uma discussão mais aprofundada da segunda, que é formulação mais recente e coerente do problema. Além disso, o caso em que são considerados processos com ruído é discutido na sequência, visto que este é o foco majoritário da dissertação. Neste cenário, ao sintonizar o controlador, o projetista irá obter uma *estimativa* dos parâmetros ideais de $C_d(q)$. Também são analisadas algumas das principais propriedades destas estimativas, destacando suas desvantagens. Por fim, um exemplo numérico, mostrando as propriedades analisadas, encerra o capítulo.

3.1 Formulação monovariável

Considere, inicialmente, um processo monovariável, i.e. com $n = 1$, e suponha que não há ruído neste processo, $v(t) = 0$. Considere, também, que foram coletados dados de entrada $u(t)$ e de saída $y(t)$ de um experimento em malha aberta ou em malha fechada. Imagine que este sistema é colocado *virtualmente* em malha fechada com o controlador ideal, como mostra a Figura 2. Na figura, as linhas contínuas representam os dados reais coletados e as linhas tracejadas representam a parcela virtual do método. Suponha, agora, que a saída $y(t)$ foi coletada deste experimento virtual. Se for este o caso, então significa

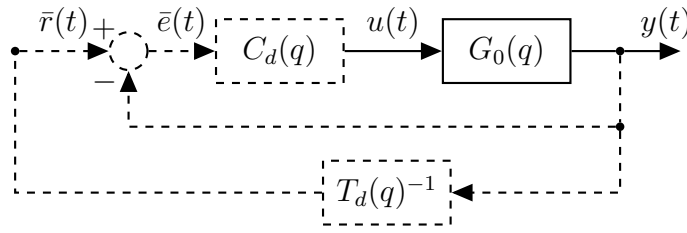


Figura 2: Diagrama da malha virtual do VRFT.

que foi aplicada uma *referência virtual* $\bar{r}(t)$ no sistema tal que

$$T_d(q)\bar{r}(t) = y(t) \quad (39)$$

$$\bar{r}(t) = T_d(q)^{-1}y(t), \quad (40)$$

com $T_d(q)$ sendo o modelo de referência escolhido pelo usuário. No sistema virtual, também calcula-se o sinal de *erro virtual* $\bar{e}(t)$:

$$\bar{e}(t) = \bar{r}(t) - y(t) \quad (41)$$

$$\bar{e}(t) = [T_d(q)^{-1} - 1]y(t). \quad (42)$$

De posse dessas informações, o usuário possui a entrada do controlador ideal (sinal $\bar{e}(t)$) e a saída do mesmo (sinal $u(t)$). Com isto, pode-se sintetizar um problema de identificação de $C_d(q)$. O objetivo, então, é encontrar o conjunto de parâmetros que minimiza o seguinte critério:

$$\hat{\rho}_{VRS} = \arg \min_{\rho} J_{VR}^{SISO}(\rho) \quad (43)$$

$$J_{VR}^{SISO}(\rho) = \bar{E} [\|F(q)[u(t) - \hat{u}(t, \rho)]\|_2^2] \quad (44)$$

$$J_{VR}^{SISO}(\rho) = \bar{E} [\|F(q)[u(t) - C(q, \rho)\bar{e}(t)]\|_2^2], \quad (45)$$

com $F(q)$ sendo um pré filtro, usado como um grau de liberdade adicional (seu propósito ficará mais claro na sequência) e $\hat{u}(t, \rho) = C(q, \rho)\bar{e}(t)$.

Este método pode ser usado para identificar qualquer tipo de controlador linear $C(q, \rho)$, mas, neste trabalho, o foco é dado aos controladores lineares nos parâmetros, visto que esta opção reduz a complexidade do problema, sem acarretar em grande perda de generalidade, conforme explicado anteriormente. Dessa forma, o critério (45) pode ser reescrito como

$$J_{VR}^{SISO}(\rho) = \bar{E} [\|F(q)[u(t) - \rho^T \bar{C}(q)\bar{e}(t)]\|_2^2] \quad (46)$$

$$J_{VR}^{SISO}(\rho) = \bar{E} [\|F(q)[u(t) - \varphi(t)^T \rho]\|_2^2], \quad (47)$$

onde $\varphi(t) \in \mathbb{R}^p$ é o vetor regressor, o qual contém os valores de $\bar{e}(t)$ filtrados pelo vetor $\bar{C}(q)$:

$$\varphi(t) = \bar{C}(q)\bar{e}(t) \quad (48)$$

$$\varphi(t) = \bar{C}(q)[T_d(q)^{-1} - 1]y(t). \quad (49)$$

O problema de otimização da função proposta em (47) pode ser interpretado como um problema de identificação de um modelo do tipo FIR. Nesta nova perspectiva, proposta

pelo VRFT, a função a ser minimizada é convexa e seu mínimo pode ser encontrado pelo método dos *mínimos quadrados* (MQ) (CAMPI; LECCHINI; SAVARESI, 2002):

$$\hat{\rho}_{VRS} = \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi_F(t) \varphi_F(t)^T \right]^{-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi_F(t) u_F(t) \right], \quad (50)$$

onde $\varphi_F(t) = F(q)\varphi(t)$, $u_F(t) = F(q)u(t)$. Destaca-se que, para encontrar uma solução única de (50), a matriz $\sum_{t=1}^N \varphi_F(t) \varphi_F(t)^T$ deve ter posto completo. Agora, a sequência do texto mostra que minimizar o critério proposto no VRFT é equivalente a minimizar o critério de seguimento do modelo de referência dentro de condições ideais, além de mostrar como aproximar estes critérios no cenário mais genérico (condições não ideais).

3.1.1 Equivalência das funções custo e projeto do filtro

Para desenvolver a comparação entre os critérios em questão, o primeiro passo é analisar a função custo $J_y(\rho)$, o que é realizado por meio do Teorema de Parseval. Dessa forma, escreve-se a mesma como

$$J_y(\rho) = \bar{E}[(y(t,\rho) - y_d(t))^2] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |T(e^{j\omega}, \rho) - T_d(e^{j\omega})|^2 \Phi_r(\omega) d\omega, \quad (51)$$

onde $\Phi_r(\omega)$ simboliza o espectro de potência do sinal de referência $r(t)$ que é empregado na malha fechada. Para facilitar o desenvolvimento, a expressão acima pode ser expandida, resultando em

$$J_y(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{G_0(e^{j\omega})C(e^{j\omega}, \rho)}{1 + G_0(e^{j\omega})C(e^{j\omega}, \rho)} - \frac{G_0(e^{j\omega})C_d(e^{j\omega})}{1 + G_0(e^{j\omega})C_d(e^{j\omega})} \right|^2 \Phi_r(\omega) d\omega \quad (52)$$

$$J_y(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|G_0(e^{j\omega})|^2 |C(e^{j\omega}, \rho) - C_d(e^{j\omega})|^2}{|1 + G_0(e^{j\omega})C(e^{j\omega}, \rho)|^2 |1 + G_0(e^{j\omega})C_d(e^{j\omega})|^2} \Phi_r(\omega) d\omega \quad (53)$$

$$J_y(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |G_0(e^{j\omega})|^2 |S(e^{j\omega}, \rho)|^2 |S_d(e^{j\omega})|^2 |C(e^{j\omega}, \rho) - C_d(e^{j\omega})|^2 \Phi_r(\omega) d\omega, \quad (54)$$

onde $S_d(e^{j\omega})$ é a resposta em frequência da função de sensibilidade quando o controlador ideal é inserido na malha.

Para continuar a análise, supõe-se, inicialmente, que o controlador ideal pertence à classe \mathcal{C} predefinida pelo usuário, i.e., que a Premissa 2.1 é satisfeita. Com isto, obtém-se a seguinte expressão de $J_y(\rho)$ no domínio da frequência:

$$J_y(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |G_0(e^{j\omega})|^2 |S(e^{j\omega}, \rho)|^2 |S_d(e^{j\omega})|^2 |C(e^{j\omega}, \rho) - C(e^{j\omega}, \rho_0)|^2 \Phi_r(\omega) d\omega. \quad (55)$$

Enfim, com uma breve análise da equação (55), é possível verificar o mínimo de $J_y(\rho)$. Nesta análise, pode-se concluir que o integrando da função $J_y(\rho)$ é positivo $\forall \omega \in [-\pi, \pi]$, se $\rho \neq \rho_0$. Neste caso, observa-se que a integral acima resultará em um valor positivo e, com isto, que a função $J_y(\rho)$ também apresentará um valor positivo. Por outro lado, quando $\rho = \rho_0$, então o integrando da função (55) é zero $\forall \omega \in [-\pi, \pi]$ e, por consequência, a função objetivo será nula. Portanto, a partir destas afirmações, é possível perceber que o mínimo da função objetivo estudada acima é $J_y(\rho_0) = 0$. De fato, esta afirmação

não é novidade nesta dissertação, visto que pode-se chegar à mesma conclusão a partir da definição de controlador ideal e da Premissa 2.1. No entanto, esta demonstração é interessante pois, para provar o mínimo de $J_{VR}^{SISO}(\rho)$, um desenvolvimento análogo será efetuado.

Uma vez demonstrado o mínimo da função $J_y(\rho)$, considere agora a função custo do VRFT monovariável: $J_{VR}^{SISO}(\rho)$. Mais uma vez, aplica-se o Teorema de Parseval:

$$J_{VR}^{SISO}(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{j\omega})|^2 \left\{ \Phi_u(\omega) - |C(e^{j\omega}, \rho)[T_d(e^{j\omega})^{-1} - 1]G_0(e^{j\omega})|^2 \Phi_u(\omega) \right\} d\omega, \quad (56)$$

com $\Phi_u(\omega)$ sendo o espectro de potência do sinal de entrada $u(t)$, obtido no experimento realizado para a coleta de dados. Com alguma manipulação algébrica, a equação acima se transforma em (CAMPI; LECCHINI; SAVARESI, 2002)

$$J_{VR}^{SISO}(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{F(e^{j\omega})G_0(e^{j\omega})[C(e^{j\omega}, \rho) - C_d(e^{j\omega})]}{C_d(e^{j\omega})G_0(e^{j\omega})} \right|^2 \Phi_u(\omega) d\omega \quad (57)$$

$$J_{VR}^{SISO}(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{j\omega})|^2 |G_0(e^{j\omega})|^2 |S_d(e^{j\omega})|^2 |T_d(e^{j\omega})^{-1}|^2 \times |[C(e^{j\omega}, \rho) - C_d(e^{j\omega})]|^2 \Phi_u(\omega) d\omega. \quad (58)$$

Novamente, se for considerado o caso ideal, no qual a Premissa 2.1 é satisfeita, então pode-se reescrever $J_{VR}^{SISO}(\rho)$ como

$$J_{VR}^{SISO}(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{j\omega})|^2 |G_0(e^{j\omega})|^2 |S_d(e^{j\omega})|^2 |T_d(e^{j\omega})^{-1}|^2 \times |C(e^{j\omega}, \rho) - C(e^{j\omega}, \rho_0)|^2 \Phi_u(\omega) d\omega. \quad (59)$$

Da mesma forma que no desenvolvimento anterior, fica claro que o mínimo de $J_{VR}^{SISO}(\rho)$ também ocorre quando $\rho = \rho_0$, independente da escolha do filtro $F(q)$ e que nesta situação $J_{VR}^{SISO}(\rho_0) = 0$. Isso prova que, no caso ideal, o mínimo de ambas as funções objetivo é zero e ocorre quando $\rho = \rho_0$. Assim, ao resolver o problema pela perspectiva do VRFT, também acaba se minimizando, de forma indireta, o critério de seguimento de modelo de referência, que era o principal objetivo do projetista.

Por outro lado, se $C_d(q) \notin \mathcal{C}$, então não é possível utilizar as relações (55) e (59) para descrever a função custo. Assim sendo, deve-se analisar as expressões (54) e (58), que mostram que ambas as funções são diferentes e, por consequência, seus mínimos também serão.

À vista disso, o grau de liberdade proporcionado pelo filtro $F(q)$ é utilizado com o propósito de aproximar as funções no caso não ideal. O filtro é projetado a partir da comparação entre as funções custo, dadas pelas equações (54) e (58). É possível notar que se o filtro fosse escolhido da seguinte forma:

$$|F(e^{j\omega})|^2 = |T_d(e^{j\omega})|^2 |S(e^{j\omega}, \rho)|^2 \frac{\Phi_r(\omega)}{\Phi_u(\omega)}, \forall \omega \in [-\pi, \pi], \quad (60)$$

isso resultaria em $J_y(\rho) = J_{VR}^{SISO}(\rho)$. Porém, ao analisar a expressão do filtro descrito em (60), percebe-se que o termo $S(e^{j\omega}, \rho)$ depende de $G_0(q)$ e do vetor de parâmetros ρ , que são quantidades desconhecidas. Por depender destas quantidades desconhecidas, não é possível implementar este filtro nas aplicações do VRFT.

Para contornar o problema descrito acima, os autores do VRFT propõem a seguinte equação para o filtro (CAMPI; LECCHINI; SAVARESI, 2002):

$$|F(e^{j\omega})|^2 = |T_d(e^{j\omega})|^2 |S_d(e^{j\omega})|^2 \frac{\Phi_r(\omega)}{\Phi_u(\omega)}, \quad \forall \omega \in [-\pi, \pi] \quad (61)$$

$$|F(e^{j\omega})|^2 = |T_d(e^{j\omega})|^2 |1 - T_d(e^{j\omega})|^2 \frac{\Phi_r(\omega)}{\Phi_u(\omega)} \quad \forall \omega \in [-\pi, \pi], \quad (62)$$

que é viável para implementação, uma vez que $T_d(e^{j\omega})$ é uma função conhecida. Observe que a fração $\frac{\Phi_r(\omega)}{\Phi_u(\omega)}$ geralmente é igual a 1, o que ocorre quando os dados são coletados em malha aberta com um sinal idêntico à referência que será utilizada na malha fechada. Ainda, é importante salientar que esta escolha para o filtro depende da seguinte aproximação:

$$|1 + G_0(e^{j\omega})C(e^{j\omega}, \rho)| \approx |1 + G_0(e^{j\omega})C_d(e^{j\omega})|, \quad (63)$$

que é válida quando o controlador ideal não é muito diferente de $C(q, \hat{\rho}_{VRS})$.

Para concluir, é importante ressaltar que a utilização do filtro proposto em (62) é indicada em todas as aplicações do VRFT. Isto se deve ao fato de que o mesmo aproxima os critérios fora do caso ideal e não muda o mínimo de $J_{VR}^{SISO}(\rho)$ dentro do caso ideal, conforme discutido anteriormente.

Ainda, para ilustrar o efeito do referido filtro, aproximando o critério do VRFT ao critério de seguimento de modelo de referência no caso em que $C_d(q) \notin \mathcal{C}$, um exemplo numérico é exibido na sequência do texto.

3.1.2 Exemplo ilustrativo

Este exemplo tem como objetivo demonstrar a eficiência do uso do filtro $F(q)$ para aproximar as funções custo $J_{VR}^{SISO}(\rho)$ e $J_y(\rho)$ no caso em que o controlador ideal não pertence à classe \mathcal{C} . O exemplo foi adaptado de (BAZANELLA; CAMPESTRINI; ECKHARD, 2012).

Seja o seguinte processo monovariável:

$$y(t) = \frac{0,5(q - 0,5)}{(q - 0,9)^2} u(t). \quad (64)$$

Suponha que se deseja controlar o mesmo com um controlador do tipo integral, ou seja:

$$C(q, \rho) = \rho \frac{q}{q - 1}, \quad (65)$$

com ρ sendo o parâmetro de ajuste do controlador. Em malha fechada, deseja-se seguir o seguinte modelo de referência:

$$T_d(q) = \frac{0,3}{q - 0,7}, \quad (66)$$

que garante seguimento de referências do tipo degrau. O controlador ideal, neste caso, é dado por:

$$C_d(q) = \frac{0,6(q - 0,9)^2}{(q - 1)(q - 0,5)}, \quad (67)$$

ou seja, um controlador do tipo PID com um filtro na ação derivativa, o que reforça a suposição inicial de que $C_d(q) \notin \mathcal{C}$.

Para fins de comparação, então, o método VRFT foi aplicado com e sem a utilização do filtro $F(q)$ definido pela equação (62). Realizou-se um ensaio em malha aberta com uma entrada do tipo salto, de tamanho $N = 100$. O termo $\frac{\Phi_r(\omega)}{\Phi_u(\omega)}$ foi considerado unitário, já que a referência que será utilizada na malha fechada também é um salto. Foram computadas as funções custo $J_y(\rho)$, $J_{VR}^{SISO}(\rho)$ com o filtro e $J_{VR}^{SISO}(\rho)$ sem o filtro. O argumento que minimiza cada função foi chamado de $\hat{\rho}$.

A Figura 3 exibe a comparação entre as funções custo do exemplo aqui apresentado. A linha azul contínua representa a função custo $J_y(\rho)$, a linha vermelha tracejada representa a função $J_{VR}^{SISO}(\rho)$ sem a utilização do filtro proposto e a linha magenta em traço-ponto representa a função $100J_{VR}^{SISO}(\rho)$ com o filtro proposto. Foi necessário multiplicar a última por um fator de $100\times$ para facilitar a visualização do mínimo, uma vez que ao se inserir o filtro, esta foi “achatada”. Na figura, o símbolo ‘+’ denota o mínimo de $J_y(\rho)$, enquanto o símbolo ‘O’ denota o mínimo de $J_{VR}^{SISO}(\rho)$ sem o filtro e ‘*’ o mínimo de $J_{VR}^{SISO}(\rho)$ com o filtro.

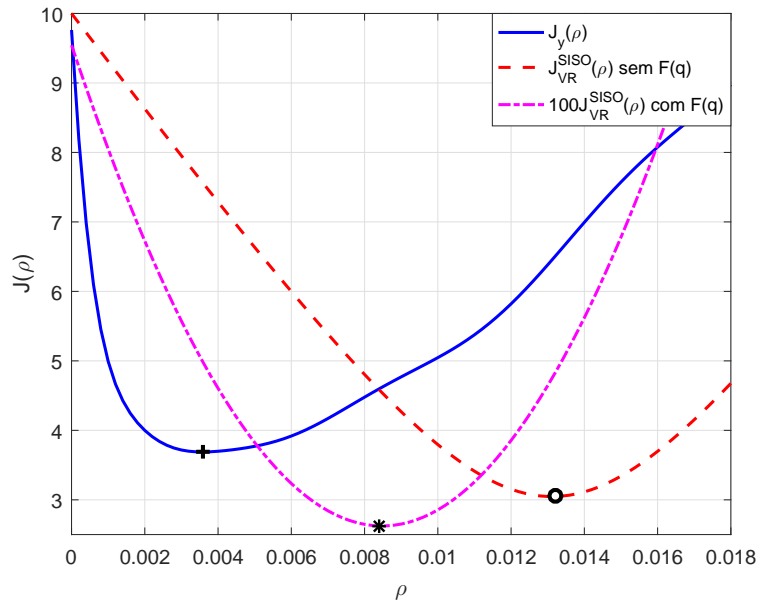


Figura 3: Comparação de funções custo $J_y(\rho)$ e $J_{VR}^{SISO}(\rho)$ com e sem $F(q)$.

A Figura 3 mostra que os mínimos de $J_y(\rho)$ e $J_{VR}^{SISO}(\rho)$ são diferentes, como já era esperado. Observa-se, também, que o argumento que minimiza $J_{VR}^{SISO}(\rho)$ alcançado ao se utilizar o filtro $F(q)$ no critério do VRFT é mais próximo ao mínimo de $J_y(\rho)$. Além disso, para uma avaliação quantitativa, a Tabela 1 mostra os valores de $J_y(\hat{\rho})$ e $\hat{\rho}$ obtidos neste exemplo, reforçando a eficiência da escolha proposta em (62) para $F(q)$.

Tabela 1: Comparação entre os valores de $J_y(\hat{\rho})$ e $\hat{\rho}$ obtidos no exemplo.

Método	$\hat{\rho}$	$J_y(\hat{\rho})$
Modelo de Referência	0,0036	3,689
VRFT sem filtro $F(q)$	0,0132	6,503
VRFT com filtro $F(q)$	0,0084	4,598

3.2 Formulação multivariável

A extensão do método para sistemas multivariáveis mantém as mesmas propriedades básicas da formulação SISO. Ainda procura-se estimar um controlador (linear nos parâmetros e pertencente a uma classe predefinida) sem o modelo do processo (que agora tem dimensão $n > 1$), usando somente dados de entrada e saída, com o objetivo de minimizar o critério de seguimento do modelo de referência. A interpretação da malha virtual também é mantida e o cálculo do erro virtual, para posterior identificação do controlador, é praticamente o mesmo. Contudo, deve-se enfatizar que agora, ao invés de sinais escalares, os cálculos são desenvolvidos para vetores de sinais. Logo, as principais diferenças da extensão multivariável são as dimensões dos sinais manipulados e o fato de que não se pode usar a propriedade de comutação na operação de multiplicação matricial. Os principais detalhes do método, assim como as diferentes formulações propostas ao longo dos últimos anos, são discutidos a seguir.

O primeiro trabalho que lidou com o método VRFT para sistemas multivariáveis foi desenvolvido em (NAKAMOTO, 2004). Posteriormente, em (FORMENTIN; SAVARESI; DEL RE, 2012) esse foi expandido para lidar com sistemas que contêm ruído, através do uso de variáveis instrumentais. Como comentado acima, a formulação proposta nestes trabalhos buscou manter as propriedades da formulação monovariável. Por conseguinte, o controlador é obtido ao minimizar a seguinte função objetivo:

$$J_{VRFT}^{MIMO}(\rho) = \bar{E} [\|F(q)u(t) - C(q,\rho)[T_d(q)^{-1} - I]F(q)y(t)\|_2^2], \quad (68)$$

com $F(q)$ sendo um filtro que adiciona um grau de liberdade ao problema, $C(q,\rho)$ é o controlador que se deseja identificar e $T_d(q)$ o modelo de referência.

Visto que o controlador é parametrizado linearmente, a função descrita em (68) é convexa e seu mínimo também pode ser encontrado pelo algoritmo dos mínimos quadrados. Porém, um detalhe importante deve ser destacado. Perceba que o sinal de saída $y(t)$ é filtrado antes do cálculo da referência virtual. Dessa forma, a função (68) só é a versão multivariável de (45) se $F(q)$ for comutado na expressão $C(q,\rho)(T_d(q)^{-1} - I)F(q)$. Como todos os termos na expressão anterior são matrizes, a comutação só é possível se $F(q) = a(q)I$, ou seja, uma função de transferência SISO $a(q)$ que multiplica a matriz identidade. Além disso, em todos os trabalhos o filtro $F(q)$ é escolhido como $F(q) = T_d(q)$, tornando a restrição de $F(q)$ uma restrição em $T_d(q)$, que deve ser escolhida da seguinte maneira (CAMPESTRINI et al., 2016):

$$T_d(q) = \begin{bmatrix} T_1(q) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T_1(q) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & T_1(q) \end{bmatrix}. \quad (69)$$

Caso o modelo de referência não seja escolhido com a estrutura acima, então o mínimo de $J_{VRFT}^{MIMO}(\rho)$ será diferente do mínimo de $J_y(\rho)$, mesmo no caso em que o controlador ideal pertence à classe \mathcal{C} e o sistema é livre de ruído (CAMPESTRINI et al., 2016). Note que tal condição é bastante restritiva, visto que deve-se escolher o mesmo comportamento desejado para todas as malhas do processo, o que em algumas situações pode ser considerado como um requisito de desempenho muito exigente.

Para solucionar este problema e fornecer uma metodologia que permite a escolha de estruturas de modelo de referência mais amplas, o trabalho desenvolvido em (CAMPESTRINI et al., 2016) apresenta o seguinte problema de minimização do erro de predição,

análogo ao caso monovariável:

$$\hat{\rho}_{VRM} = \arg \min_{\rho} J_{VR}^{MIMO}(\rho) \quad (70)$$

$$J_{VR}^{MIMO}(\rho) = \bar{E} [\|F(q)[u(t) - \hat{u}(t, \rho)]\|_2^2] \quad (71)$$

$$J_{VR}^{MIMO}(\rho) = \bar{E} [\|F(q)[u(t) - C(q, \rho)\bar{e}(t)]\|_2^2]. \quad (72)$$

Agora, de fato, este problema de otimização é a extensão autêntica do caso monovariável demonstrada em (45). O erro virtual multivariável $\bar{e}(t) \in \mathbb{R}^n$, então, é calculado por:

$$\bar{e}(t) = [T_d(q)^{-1} - I]y(t). \quad (73)$$

Também, como o controlador estudado é linear dos parâmetros, pode-se escrever:

$$J_{VR}^{MIMO}(\rho) = \bar{E} [\|F(q)[u(t) - \varphi(t)^T \rho]\|_2^2], \quad (74)$$

onde, neste cenário, $\varphi(t)^T \in \mathbb{R}^{n \times p}$ é uma matriz composta por vetores regressores, dada por

$$\varphi(t)^T = \begin{bmatrix} \varphi_1(t)^T & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varphi_2(t)^T & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \varphi_n(t)^T \end{bmatrix}, \quad (75)$$

com cada $\varphi_i(t)^T$ sendo definido por

$$\varphi_i(t)^T = [\bar{C}_{i1}(q)^T \bar{e}_1(t) \quad \bar{C}_{i2}(q)^T \bar{e}_2(t) \quad \dots \quad \bar{C}_{in}(q)^T \bar{e}_n(t)], \quad (76)$$

e com dimensão tal que $\varphi_i(t)^T \in \mathbb{R}^{1 \times p_i}$, com $p_i = \sum_{j=1}^n p_{ij}$ ¹.

Assim de forma análoga ao caso SISO, o problema de seguimento do modelo de referência passa a ser reescrito como um problema de identificação do controlador ideal. Além disso, por assumir que os controladores são lineares nos parâmetros, o problema também pode ser interpretado como a identificação de um modelo do tipo FIR. Ao contrário da otimização direta de $J_y(\rho)$, a otimização de (74) é convexa e possui a seguinte solução analítica (CAMPESTRINI et al., 2016):

$$\hat{\rho}_{VRM} = \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi_F(t) \varphi_F(t)^T \right]^{-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi_F(t) u_F(t) \right], \quad (77)$$

com $\varphi_F(t) = \varphi(t)F(q)^T$ e $u_F(t) = F(q)u(t)$, que é semelhante à solução do problema no caso monovariável. Novamente, para que seja possível obter uma solução única para o problema é necessário calcular a matriz inversa de $\sum_{t=1}^N \varphi_F(t) \varphi_F(t)^T$, ou seja, a mesma deve ter posto completo.

¹Lembrando que p_{ij} é a dimensão do vetor de parâmetros do controlador $C_{ij}(q, \rho_{ij})$, conforme definido na Subsecção 2.2.1, logo após a equação (18).

3.2.1 Equivalência de funções custo e projeto do filtro

Assim como foi desenvolvido para o caso SISO, aqui será exibida a equivalência das funções custo $J_y(\rho)$ e $J_{VR}^{MIMO}(\rho)$ no caso ideal, i.e., o caso em que o controlador ideal se encontra dentro da classe escolhida e não há a presença de ruído no processo. Além disso, uma diretriz para o projeto do filtro no caso não ideal (controlador ideal fora da classe) será apresentada.

Primeiramente analisa-se a função custo $J_y(\rho)$ no domínio da frequência, com a aplicação do Teorema de Parseval, o que resulta em uma expressão levemente diferente do caso anterior, dada a natureza multivariável dos sistemas:

$$J_y(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{tr}\{L(e^{j\omega}, \rho)L(e^{j\omega}, \rho)^H\}d\omega, \quad (78)$$

onde o sobrescrito H denota a matriz conjugada Hermitiana e $L(e^{j\omega}, \rho)$ é dado por

$$L(e^{j\omega}, \rho) = [T_d(e^{j\omega}) - T(e^{j\omega}, \rho)]\Phi_r^{1/2}(\omega) \quad (79)$$

$$L(e^{j\omega}, \rho) = [S_d(e^{j\omega})G_0(e^{j\omega})C_d(e^{j\omega}) - G_0(e^{j\omega})C(e^{j\omega}, \rho)S(e^{j\omega}, \rho)]\Phi_r^{1/2}(\omega), \quad (80)$$

com $\Phi_r^{1/2}(\omega)$ sendo um fator do espectro de potência do sinal $r(t)$. Cabe ressaltar que todas as expressões aqui analisadas devem ser satisfeitas para $\omega \in [-\pi, \pi]$, mas tal condição será omitida no desenvolvimento que segue, visando simplificar a notação. Após alguma manipulação da equação (80), conclui-se que (CAMPESTRINI et al., 2016)

$$L(e^{j\omega}, \rho) = [T_d(e^{j\omega})(I - C_d(e^{j\omega})^{-1}C(e^{j\omega}, \rho))S(e^{j\omega}, \rho)]\Phi_r^{1/2}(\omega) \quad (81)$$

$$L(e^{j\omega}, \rho) = [T_d(e^{j\omega})C_d(e^{j\omega})^{-1}(C_d(e^{j\omega}) - C(e^{j\omega}, \rho))S(e^{j\omega}, \rho)]\Phi_r^{1/2}(\omega). \quad (82)$$

Novamente, considerando que a Premissa 2.1 é satisfeita, então é possível escrever o controlador ideal como: $C_d(e^{j\omega}) = C(e^{j\omega}, \rho_0)$ e assim (82) se transforma em:

$$L(e^{j\omega}, \rho) = [T_d(e^{j\omega})C_d(e^{j\omega})^{-1}(C(e^{j\omega}, \rho_0) - C(e^{j\omega}, \rho))S(e^{j\omega}, \rho)]\Phi_r^{1/2}(\omega). \quad (83)$$

Enfim, para verificar o mínimo da função $J_y(\rho)$, da mesma forma que foi realizado no caso SISO, deve-se analisar a equação (83). Perceba que se $\rho = \rho_0$, então o termo $C(e^{j\omega}, \rho_0) - C(e^{j\omega}, \rho)$ será nulo. Por consequência, $L(e^{j\omega}, \rho_0) = 0 \forall \omega \in [-\pi, \pi]$, o que resulta, também, em $J_y(\rho_0) = 0$. Por outro lado, se $\rho \neq \rho_0$, então $L(e^{j\omega}, \rho_0) \neq 0$. Por conseguinte, o integrando de (78) será sempre positivo², o que resulta em $J_y(\rho)$ também positivo neste caso. A partir desta breve análise, pode-se concluir, mais uma vez, que $J_y(\rho_0) = 0$ é o mínimo do critério de seguimento de modelo de referência. Este fato também não é novidade, mas tal desenvolvimento é conveniente para demonstrar a equivalência das funções custo aqui discutidas e para o futuro projeto do filtro $F(q)$.

Da mesma forma, agora analisa-se a função custo proposta pela metodologia do VRFT, por meio do Teorema de Parseval:

$$J_{VR}^{MIMO}(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{tr}\{X(e^{j\omega}, \rho)X(e^{j\omega}, \rho)^H\}d\omega, \quad (84)$$

onde, por sua vez, o termo $X(e^{j\omega}, \rho)$ é dado por (CAMPESTRINI et al., 2016):

$$X(e^{j\omega}, \rho) = [F(e^{j\omega})(C_d(e^{j\omega}) - C(e^{j\omega}, \rho))C_d(e^{j\omega})^{-1}]\Phi_u^{1/2}(\omega) \quad (85)$$

$$X(e^{j\omega}, \rho) = [F(e^{j\omega})C_d(e^{j\omega})(I - C_d(e^{j\omega})^{-1}C(e^{j\omega}, \rho))C_d(e^{j\omega})^{-1}]\Phi_u^{1/2}(\omega). \quad (86)$$

²Perceba que o traço de uma matriz AA^H é sempre positivo.

Considerando o caso em que $C_d(q) \in \mathcal{C}$, então o controlador ideal pode ser expresso pela relação: $C_d(e^{j\omega}) = C(e^{j\omega}, \rho_0)$. Assim, análogo ao que já foi feito em desenvolvimentos anteriores, escreve-se o termo em questão como

$$X(e^{j\omega}, \rho) = [F(e^{j\omega})(C(e^{j\omega}, \rho_0) - C(e^{j\omega}, \rho))C_d(e^{j\omega})^{-1}] \Phi_u^{1/2}(\omega). \quad (87)$$

Neste caso, o mínimo de $J_{VR}^{MIMO}(\rho)$ também pode ser verificado por uma breve análise do termo (87) e da expressão (84). Como no caso anterior, percebe-se que se $\rho = \rho_0$, então o termo $C(e^{j\omega}, \rho_0) - C(e^{j\omega}, \rho)$ da equação (87) é nulo. Assim sendo, $X(e^{j\omega}, \rho_0) = 0$ e como consequência, $J_y(\rho_0) = 0$. De outro modo, se $\rho \neq \rho_0$, então $X(e^{j\omega}, \rho) \neq 0$. Com isto, o integrando de (84) será sempre positivo $\forall \omega \in [-\pi, \pi]$, acarretando em um valor positivo para $J_y(\rho)$. Portanto, observa-se que $J_{VR}^{MIMO}(\rho_0) = 0$ é o valor mínimo do critério proposto pelo VRFT, provando a equivalência das funções custo no cenário onde $C_d(q) \in \mathcal{C}$.

Em contrapartida, se o controlador ideal não pertence a classe predefinida de controladores, não se pode dizer que $C_d(q) = C(e^{j\omega}, \rho_0)$. Assim, comparando as expressões de $L(e^{j\omega}, \rho)$, dada por (81), e de $X(e^{j\omega}, \rho)$, descrita em (85), fica claro que ambas são diferentes, e portanto, seus mínimos também serão. Então, com o intuito de aproximar o critério minimizado pelo VRFT e o critério de seguimento de modelo de referência, utiliza-se o grau de liberdade fornecido pelo filtro $F(q)$. É fácil perceber que, se fosse utilizado o seguinte filtro:

$$F(e^{j\omega}) = S_d(e^{j\omega})G_0(e^{j\omega}), \quad (88)$$

e se o sinal de entrada da planta fosse tal que seu espectro tivesse a forma

$$\Phi_u(\omega) = C_d(e^{j\omega})S(e^{j\omega}, \rho)\Phi_r(\omega)S(e^{j\omega}, \rho)^H C_d(e^{j\omega})^H, \quad (89)$$

então as funções $J_{VR}^{MIMO}(\rho)$ e $J_y(\rho)$ seriam idênticas. Contudo, o filtro $F(q)$ nesta configuração depende do modelo do processo, que é desconhecido no projeto de controladores baseados em dados. Além disso, o sinal de entrada que deveria ser aplicado também depende de grandezas desconhecidas, como $C_d(e^{j\omega})$ e $S(e^{j\omega}, \rho)$ (CAMPESTRINI et al., 2016).

Para resolver a dificuldade do projeto do filtro, uma escolha de caráter prático é sugerida no trabalho (CAMPESTRINI et al., 2016). Os autores supõem que o termo $I - C_d(e^{j\omega})^{-1}C(e^{j\omega}, \rho)$ pode ser comutado nas expressões (81) e (85). Este procedimento também é adotado em uma das versões MIMO do IFT (JANSSON; HJALMARSSON, 2004). A partir desta hipótese, pode-se manipular as equações (81) e (85) para chegar nas expressões:

$$L_c(e^{j\omega}, \rho) = [(I - C_d(e^{j\omega})^{-1}C(e^{j\omega}, \rho))T_d(e^{j\omega})S(e^{j\omega}, \rho)]\Phi_r^{1/2}(\omega) \quad (90)$$

$$X_c(e^{j\omega}, \rho) = [(I - C_d(e^{j\omega})^{-1}C(e^{j\omega}, \rho))F(e^{j\omega})]\Phi_u^{1/2}(\omega). \quad (91)$$

Com base nas equações acima, fica claro que se o filtro for escolhido de forma a respeitar

$$F(e^{j\omega}) = T_d(e^{j\omega})S(e^{j\omega}, \rho)\Phi_r^{1/2}(\omega)\Phi_u^{-1/2}(\omega), \quad (92)$$

então $L_c(e^{j\omega}, \rho) = X_c(e^{j\omega}, \rho)$.

No entanto, nesta proposta, o filtro ainda depende de uma quantidade desconhecida: $S(e^{j\omega}, \rho)$. Assim, da mesma maneira que na formulação monovariável do método, faz-se a aproximação

$$S(e^{j\omega}, \rho) \approx S_d(e^{j\omega}), \quad (93)$$

que é coerente quando o problema de seguimento de modelo de referência é bem formulado. Finalmente, o filtro que aproxima as funções custo do VRFT e do critério de seguimento de modelo de referência para o caso de processos MIMO pode ser implementado por (CAMPESTRINI et al., 2016)

$$F(e^{j\omega}) = T_d(e^{j\omega})(I - T_d(e^{j\omega}))\Phi_r^{1/2}(\omega)\Phi_u^{-1/2}(\omega). \quad (94)$$

Cabe destacar que um estudo de caso detalhado, que comprova a eficiência do filtro definido na equação (94), é exibido em (CAMPESTRINI et al., 2016).

3.3 O uso de dados com ruído

Até o momento, foram descritos os procedimentos da técnica VRFT para o caso de processos sem ruído. De outro modo, nesta seção se desenvolve a análise, já considerando sistemas multivariáveis (visto que o caso SISO pode ser considerado um caso particular), onde o ruído está presente e é significativo. Neste caso, ao aplicar o VRFT para sintonizar o controlador, a variável $\hat{\rho}$ não será mais uma grandeza determinística, mas sim uma variável aleatória que representa uma estimativa do valor ideal ρ_0 (BAZANELLA; CAMPESTRINI; ECKHARD, 2012). Também são expostas algumas das principais propriedades do método VRFT, onde fica evidente a baixa qualidade de suas estimativas e a motivação deste trabalho.

É importante ressaltar que nesta seção supõe-se que a Premissa 2.1 é satisfeita, ou seja, o controlador ideal está dentro da classe \mathcal{C} . Caso contrário, as propriedades da estimativa do VRFT dependerão das características do conjunto de dados e da diferença entre a classe de controladores predefinida e a classe do controlador ideal (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989). Este fato impossibilita uma análise mais ampla, sendo necessário um estudo específico para cada caso.

Considere o sistema definido no Capítulo 2 por meio da equação (1) com n entradas e n saídas, $n \geq 1$. Lembrando que, para obter a estimativa dos parâmetros do controlador por meio do VRFT, é necessário calcular o sinal de erro virtual $\bar{e}(t)$ baseado no conjunto de dados Z^N coletado do processo. Contudo, quando há ruído nos dados de saída coletados sobre o processo, o sinal de erro virtual será contaminado:

$$\bar{e}(t) = (T_d(q)^{-1} - I)y(t) \quad (95)$$

$$\bar{e}(t) = \underbrace{(T_d(q)^{-1} - I)G_0(q)u(t)}_{\bar{e}_0(t)} + \underbrace{(T_d(q)^{-1} - I)H_0(q)w(t)}_{\tilde{e}(t)} \quad (96)$$

$$\bar{e}(t) = \bar{e}_0(t) + \tilde{e}(t). \quad (97)$$

Dessa forma, além da parcela do erro virtual que realmente excita o controlador ideal na interpretação da malha virtual, aqui denominada por $\bar{e}_0(t)$, existe uma parcela do sinal que surge em razão da presença do ruído de saída do processo. Perceba que na interpretação da malha virtual esta parcela, denominada $\tilde{e}(t)$, não existe e, portanto, não excita o controlador ideal.

Usualmente, os problemas típicos de identificação de sistemas são formulados considerando que o ruído está presente na saída dos sistemas que serão identificados. Entretanto, este não é o caso aqui estudado, pois o erro virtual é, na verdade, a entrada do sistema que se deseja identificar. Na comunidade de identificação de sistemas, este tipo de problema é conhecido como *Errors-in-Variables* (SÖDERSTRÖM, 2018) e suas propriedades, aplicadas ao método do VRFT, são estudadas na sequência.

Destaca-se que as propriedades aqui exploradas são *propriedades assintóticas*, ou seja, são válidas quando $N \rightarrow \infty$. A análise é realizada desta forma pois calcular tais propriedades para o caso de N genérico é uma tarefa muito complicada (LJUNG, 1999). Porém, visto que em situações práticas é impossível utilizar um número infinito de dados, supõe-se que tais propriedades sejam aproximadas ao utilizar um grande número de dados N . Por isso, destaca-se também que, quanto menor o número de dados utilizados no processo de identificação, menos verossímeis serão estas propriedades.

As primeiras propriedades do VRFT analisadas no contexto desta dissertação são a consistência da estimativa e o erro de polarização (ou *bias*, em inglês). Seus conceitos são enunciados a seguir.

Definição 3.1. (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989) *Uma estimativa é dita polarizada se seu valor esperado é diferente do valor real: $E[\hat{\rho}] \neq \rho_0$.*

Definição 3.2. (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989) *Uma estimativa é dita consistente se $\hat{\rho} \rightarrow \rho_0$ quando $N \rightarrow \infty$.*

É importante não confundir estes dois conceitos. A consistência é definida para $N \rightarrow \infty$, enquanto a polarização pode ser avaliada para N finito. Se uma estimativa é consistente, então ela é não polarizada para $N \rightarrow \infty$. Isto não significa que a estimativa seja não polarizada para N finito.

Ainda, antes de fazer a análise, é importante escrever a relação entrada e saída do controlador ideal da seguinte maneira (lembrando que o mesmo é parametrizado de forma linear):

$$u(t) = C(q, \rho_0) \bar{e}_0(t) \quad (98)$$

$$u(t) = \varphi_0(t)^T \rho_0, \quad (99)$$

onde $\varphi_0(t)$ é a matriz de vetores regressores relativa ao sinal $\bar{e}_0(t)$, a qual é montada como em (75) e (76), usando somente a parcela do sinal que excita o controlador ideal $\bar{e}_0(t)$, ao invés de $\bar{e}(t)$. Ao observar as equações acima, é importante notar que o usuário não tem a informação do sinal $\bar{e}_0(t)$ de forma independente, devido à parcela adicional do ruído que surge no erro virtual. Na realidade, o sinal disponível para realizar a identificação é $\bar{e}(t)$, descrito em (97). Por conseguinte, uma forma de reescrever $u(t)$ em função dos sinais disponíveis e de um termo de contribuições estocásticas é

$$u(t) = C(q, \rho_0) \bar{e}(t) - C(q, \rho_0) \tilde{e}(t) \quad (100)$$

$$u(t) = \varphi(t)^T \rho_0 - \tilde{\varphi}(t)^T \rho_0 \quad (101)$$

$$u(t) = \varphi(t)^T \rho_0 + d(t), \quad (102)$$

com $\varphi(t) = \varphi_0(t) + \tilde{\varphi}(t)$, onde $\tilde{\varphi}(t)$ é a matriz de vetores regressores relacionada ao sinal $\tilde{e}(t)$ e $d(t) = -\tilde{\varphi}(t)^T \rho_0 \in \mathbb{R}^n$.

Considere agora, a estimativa obtida pela formulação padrão do VRFT, a qual é calculada através do método dos mínimos quadrados, conforme discutido nas Seções 3.1 e 3.2. Aqui será usado o símbolo $\hat{\rho}_{VR}$ para denotá-la de uma forma mais genérica, englobando tanto o caso SISO quanto o MIMO. Suponha que $N \rightarrow \infty$. Dessa forma, pode-se substituir os somatórios em (77) ou (50) pelo operador $\bar{E}[\cdot]$, resultando em

$$\hat{\rho}_{VR} = [\bar{E} \varphi_F(t) \varphi_F(t)^T]^{-1} [\bar{E} \varphi_F(t) u_F(t)]. \quad (103)$$

Uma simplificação pode ser realizada no termo $[\bar{E}\varphi_F(t)\varphi_F(t)^T]$, o que pode ser verificado ao detalhar o mesmo:

$$\bar{E}\varphi_F(t)\varphi_F(t)^T = \bar{E}[(\varphi_{0F}(t) + \tilde{\varphi}_F(t))(\varphi_{0F}(t)^T + \tilde{\varphi}_F(t)^T)] \quad (104)$$

$$\begin{aligned} &= \bar{E}\varphi_{0F}(t)\varphi_{0F}(t)^T + \bar{E}\varphi_{0F}(t)\tilde{\varphi}_F(t)^T \\ &+ \bar{E}\tilde{\varphi}_F(t)\varphi_{0F}(t)^T + \bar{E}\tilde{\varphi}_F(t)\tilde{\varphi}_F(t)^T. \end{aligned} \quad (105)$$

Uma vez que $\varphi_{0F}(t)$ contém termos compostos pelo sinal $\bar{e}_0(t)$ filtrado, $\tilde{\varphi}_F(t)$ é composta por termos de $\tilde{e}(t)$ filtrado e ambos os sinais são descorrelacionados, pode-se concluir que os termos de correlação cruzada entre $\varphi_{0F}(t)$ e $\tilde{\varphi}_F(t)$ são nulos. Dessa forma, escreve-se

$$\bar{E}\varphi_F(t)\varphi_F(t)^T = R_{\varphi_{0F}} + R_{\tilde{\varphi}_F}, \quad (106)$$

com $R_{\varphi_{0F}} = \bar{E}\varphi_{0F}(t)\varphi_{0F}(t)^T$ e $R_{\tilde{\varphi}_F} = \bar{E}\tilde{\varphi}_F(t)\tilde{\varphi}_F(t)^T$, onde R é usado de forma análoga ao que foi definido na Seção 2.1 para denotar a autocorrelação, onde aqui foi omitido o termo entre parênteses ($\tau = 0$), para simplificar a notação. Além disso, o termo $\bar{E}\varphi_F(t)u_F(t)$ também pode ser reescrito, utilizando a seguinte relação $u_F(t) = F(q)\varphi_0(t)^T\rho_0$, como demonstrado em (99). Assim, desenvolvendo um raciocínio similar ao anterior, chega-se em

$$\bar{E}\varphi_F(t)u_F(t) = \bar{E}\varphi_F(t)\varphi_{0F}(t)^T\rho_0 \quad (107)$$

$$= R_{\varphi_{0F}}\rho_0. \quad (108)$$

Finalmente, substituindo estes termos na equação da estimativa assintótica dos parâmetros, conclui-se que

$$\hat{\rho}_{VR} = (R_{\varphi_{0F}} + R_{\tilde{\varphi}_F})^{-1}R_{\varphi_{0F}}\rho_0. \quad (109)$$

Então, calculando a diferença entre a estimativa e o valor ideal dos parâmetros, chega-se na expressão

$$\hat{\rho}_{VR} - \rho_0 = [(R_{\varphi_{0F}} + R_{\tilde{\varphi}_F})^{-1}R_{\varphi_{0F}} - I]\rho_0. \quad (110)$$

A partir da equação (110), algumas propriedades interessantes desta metodologia podem ser aferidas.

Primeiramente, suponha que o ruído no processo é pouco significativo. Por consequência, a relação sinal ruído (ou SNR: *Signal-to-Noise Ratio*) do erro virtual será elevada. Isto implica que, usando um abuso de notação, $R_{\varphi_{0F}} \gg R_{\tilde{\varphi}_F}$ e que a seguinte aproximação pode ser realizada:

$$R_{\varphi_{0F}} + R_{\tilde{\varphi}_F} \approx R_{\varphi_{0F}}. \quad (111)$$

Dessa forma, analisando (110), conclui-se que neste cenário de *ruído pouco significativo*, a estimativa $\hat{\rho}_{VR} \rightarrow \rho_0$, ou seja, a mesma será *consistente*, desde que exista a matriz inversa $R_{\varphi_{0F}}^{-1}$. Sem entrar em muitos detalhes, destaca-se que esta condição de existência da matriz inversa $R_{\varphi_{0F}}^{-1}$ é, na verdade, uma condição de persistência de excitação do sinal de entrada $u(t)$ coletado nos experimentos (BAZANELLA; CAMPESTRINI; ECKHARD, 2012). Para que o leitor possa estudar mais detalhes sobre a persistência de excitação de sinais quasi-estacionários, recomenda-se a leitura de (LJUNG, 1999).

Em contrapartida, se a presença de ruído no processo for considerável, o sinal de erro virtual terá um baixo SNR. Logo, neste cenário, não se pode desenvolver a aproximação

realizada anteriormente ($R_{\varphi_{0F}} + R_{\tilde{\varphi}_F} \approx R_{\varphi_{0F}}$) e, com isto, conclui-se que a estimativa $\hat{\rho}_{VR}$ será *não consistente*, i.e., será *polarizada* para $N \rightarrow \infty$. Além disto, vale destacar que, quanto menor o SNR, ou quanto maior for o efeito do ruído no processo, “maior” será a matriz $R_{\tilde{\varphi}_F}$. No caso de ruído muito elevado, pode-se considerar as seguintes aproximações:

$$R_{\varphi_{0F}} + R_{\tilde{\varphi}_F} \approx R_{\tilde{\varphi}_F} \quad (112)$$

$$R_{\tilde{\varphi}_F}^{-1} R_{\varphi_{0F}} \ll I. \quad (113)$$

Agora, ao analisar a equação (110), nota-se que o valor da estimativa tende a zero, ou seja, $\hat{\rho}_{VR} \rightarrow 0$. Assim, é possível concluir que, à medida que o SNR diminui, a estimativa dos parâmetros se aproxima do valor $\hat{\rho}_{VR} = 0$.

A partir da análise desenvolvida acima, foi possível perceber que, ao lidar com processos que apresentam uma presença considerável de ruído, a metodologia tradicional do VRFT com mínimos quadrados produz estimativas não consistentes (polarizadas para $N \rightarrow \infty$). Essa característica do método é extremamente indesejada uma vez que, mesmo aumentando o número de dados coletados de forma arbitrária e mantendo a relação sinal-ruído constante, não é possível se aproximar do valor de parâmetros ideais (BAZANELLA; CAMPESTRINI; ECKHARD, 2012). Além disso, este erro nas estimativas de ρ_0 acaba degradando o desempenho dos sistemas de controle em malha fechada que resultam da aplicação desta metodologia de sintonia (CAMPI; LECCHINI; SAVARESI, 2002), fato que será exibido de forma mais concreta no exemplo motivacional que encerra este capítulo.

3.3.1 Variáveis instrumentais

Com o intuito de contornar o problema de polarização, uma técnica diferente é utilizada para estimar os parâmetros do controlador ideal por meio do VRFT. A utilização desta técnica foi proposta pelos autores da metodologia SISO (CAMPI; LECCHINI; SAVARESI, 2002) e também estendida para a versão MIMO (CAMPESTRINI et al., 2016). Tal técnica é baseada no uso de *variáveis instrumentais básicas* e é amplamente conhecida na literatura de identificação (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989; LJUNG, 1999). No caso multivariável a variável instrumental (VI) é uma matriz $\zeta(t) \in \mathbb{R}^{p \times n}$, escolhida pelo usuário, que deve satisfazer:

$$\bar{E}[\zeta(t)\varphi(t)^T] > 0 \quad (114)$$

$$\bar{E}[\zeta(t)d(t)] = 0. \quad (115)$$

Em outras palavras, a variável instrumental deve ser correlacionada com a matriz de vetores regressores $\varphi(t)$, mas descorrelacionada com a parcela de ruído $d(t)$. Com isto, é possível garantir que sua estimativa é assintoticamente não polarizada, e portanto, consistente, o que será demonstrado na sequência. Após escolher a variável instrumental, a estimativa é calculada ao resolver a seguinte equação de correlação (LJUNG, 1999):

$$\hat{\rho}_{VI} = \text{Sol} \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \zeta_F(t) d_F(t) = 0 \right] \quad (116)$$

$$\hat{\rho}_{VI} = \text{Sol} \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \zeta_F(t) (u_F(t) - \varphi_F(t)^T \rho) = 0 \right], \quad (117)$$

com “Sol” simbolizando a solução da equação, $\zeta_F(t) = \zeta(t)F(q)^T$ e $d_F(t) = F(q)d(t)$. Ao resolver a equação de correlação descrita acima, a nova estimativa do vetor de parâmetros ρ_0 é dada por (CAMPI; LECCHINI; SAVARESI, 2002; CAMPESTRINI et al., 2016)

$$\hat{\rho}_{v_I} = \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \zeta_F(t) \varphi_F(t)^T \right]^{-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \zeta_F(t) u_F(t) \right]. \quad (118)$$

Em relação ao tipo de variável instrumental que deve ser empregada no VRFT, os autores da metodologia propõem duas escolhas diferentes. Em ambas as escolhas deve-se obter um novo sinal de saída $y'(t)$ que seja descorrelacionado com o ruído do sinal $y(t)$ e correlacionado com o vetor regressor $\varphi_{0F}(t)$. Assim, com este novo sinal de saída, a variável instrumental é calculada por

$$\zeta(t) = \begin{bmatrix} \zeta_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \zeta_2(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \zeta_n(t) \end{bmatrix}, \quad (119)$$

com cada $\zeta_i(t) \in \mathbb{R}^{p_i}$ dado por

$$\zeta_i(t) = [\bar{C}_{i1}(q)^T \bar{e}'_1(t) \quad \bar{C}_{i2}(q)^T \bar{e}'_2(t) \quad \dots \quad \bar{C}_{in}(q)^T \bar{e}'_n(t)]^T, \quad (120)$$

onde $\bar{e}'(t)$ é o erro virtual calculado a partir da saída $y'(t)$:

$$\bar{e}'(t) = (T_d(q)^{-1} - I)y'(t). \quad (121)$$

A primeira escolha para obter o novo sinal $y'(t)$ utiliza dados de um experimento adicional no processo e garante que a estimativa será consistente. A segunda não garante que $\hat{\rho} \rightarrow \rho_0$ assintoticamente, mas assume que o erro residual é desprezível. As escolhas propostas são:

- *Experimento adicional:* Realiza-se um segundo experimento no processo, com a mesma entrada $u(t)$, onde será coletada a nova saída $y'(t)$. Como consequência, o sinal $y'(t)$ será correlacionado com o vetor regressor mas será diferente de $y(t)$, uma vez que cada um é afetado por uma realização diferente do ruído. Supõe-se que os diferentes experimentos são descorrelacionados e, então, a estimativa $\hat{\rho}_{v_I}$ será assintoticamente não polarizada.
- *Identificação da planta:* A partir dos dados coletados Z^N do experimento, realiza-se a identificação de um modelo da planta $\hat{G}(q)$. Com este modelo, o sistema é simulado e sua nova saída é calculada como: $y'(t) = \hat{G}u(t)$. Então, a variável instrumental é construída como nas equações (119) e (120). Destaca-se que este tipo de variável instrumental não garante que $\hat{\rho} \rightarrow \rho_0$ assintoticamente devido a erros que podem ocorrer no procedimento de identificação, os quais são dependentes do ruído (BAZANELLA; CAMPESTRINI; ECKHARD, 2012). Além disso, ressalta-se que, mesmo utilizando uma etapa intermediária de identificação do sistema, este método continua sendo considerado como baseado em dados. Não se perde a característica de controle baseado em dados pois esta etapa só é realizada para o cálculo da variável instrumental e o modelo obtido não é usado diretamente para projetar o controlador. Inclusive pode-se usar um modelo de alta ordem para identificar o modelo $\hat{G}(q)$, visto que sua estrutura não tem influência na complexidade do controlador.

A análise de consistência da estimativa com variável instrumental é desenvolvida na seqüência. Para tanto, considere a estimativa descrita em (118) no caso assintótico, i.e., quando $N \rightarrow \infty$, onde os somatórios podem ser substituídos pelo operador $\bar{E}[\cdot]$:

$$\hat{\rho}_{VI} = [\bar{E}\zeta_F(t)\varphi_F(t)^T]^{-1}[\bar{E}\zeta_F(t)u_F(t)]. \quad (122)$$

Primeiramente, perceba que a variável instrumental pode ser escrita como:

$$\zeta_F(t) = \varphi_{0F}(t) + \tilde{\varphi}'_F(t), \quad (123)$$

onde $\tilde{\varphi}'_F(t)$ é o vetor regressor que contém o ruído presente na saída $y'(t)$. No caso da variável instrumental calculada com o segundo experimento, $\tilde{\varphi}'_F(t)$ é construída através do ruído deste segundo experimento. Por outro lado, quando a variável instrumental é obtida com o modelo identificado $\hat{G}(q)$, pode se considerar que $\tilde{\varphi}'_F(t)$ representa os possíveis erros presentes no procedimento de identificação.

Agora, da mesma forma que foi desenvolvido para o caso anterior de estimativa com mínimos quadrados, considere a expansão do termo $\bar{E}\zeta_F(t)\varphi_F(t)$:

$$\bar{E}\zeta_F(t)\varphi_F(t)^T = \bar{E}[(\varphi_{0F}(t) + \tilde{\varphi}_F(t))(\varphi_{0F}(t)^T + \tilde{\varphi}'_F(t)^T)] \quad (124)$$

$$\begin{aligned} &= \bar{E}\varphi_{0F}(t)\varphi_{0F}(t)^T + \bar{E}\varphi_{0F}(t)\tilde{\varphi}'_F(t)^T \\ &+ \bar{E}\tilde{\varphi}_F(t)\varphi_{0F}(t)^T + \bar{E}\tilde{\varphi}_F(t)\bar{E}\tilde{\varphi}'_F(t)^T. \end{aligned} \quad (125)$$

Note que, ao obter a variável instrumental com dados de um segundo experimento, os termos $\varphi_{0F}(t)$, $\tilde{\varphi}_F(t)$ e $\tilde{\varphi}'_F(t)$ são todos descorrelacionados. Já no caso em que a variável instrumental é obtida com o modelo simulado $\hat{G}(q)$, haverá uma pequena correlação entre $\tilde{\varphi}_F(t)$ e $\tilde{\varphi}'_F(t)$ devido aos erros de identificação, que são correlacionados com o ruído. Entretanto, considera-se que esta pequena correlação pode ser desprezada³. Com isto, para as duas escolhas de variável instrumental, pode-se concluir que:

$$\bar{E}\zeta_F(t)\varphi_F(t)^T = \bar{E}\varphi_{0F}(t)\varphi_{0F}(t)^T = R_{\varphi_{0F}}. \quad (126)$$

Além disso, usando a relação $u_F(t) = \varphi_{0F}(t)^T \rho_0$, o termo $\bar{E}\zeta_F(t)u_F(t)$ também pode ser reescrito como

$$\bar{E}\zeta_F(t)u_F(t) = \bar{E}[(\varphi_{0F}(t) + \tilde{\varphi}'_F(t))\varphi_{0F}(t)^T \rho_0] \quad (127)$$

$$= \bar{E}\varphi_{0F}(t)\varphi_{0F}(t)^T \rho_0 \quad (128)$$

$$= R_{\varphi_{0F}} \rho_0. \quad (129)$$

Finalmente, com as simplificações desenvolvidas acima, percebe-se que a estimativa assintótica da metodologia de VI é dada por

$$\hat{\rho}_{VI} = R_{\varphi_{0F}}^{-1} R_{\varphi_{0F}} \rho_0 \quad (130)$$

$$\hat{\rho}_{VI} = \rho_0, \quad (131)$$

o que mostra que a mesma é *consistente* (não polarizada para $N \rightarrow \infty$).

Apesar da estimativa produzida pela técnica das variáveis instrumentais ser consistente, o que é uma qualidade importante desta metodologia, existe uma inconveniência

³De fato, esta pequena correlação acaba gerando uma, também pequena, polarização nas estimativas. No entanto, como mencionado anteriormente, assume-se que esta polarização é desprezível.

ao utilizar a mesma: a covariância das estimativas se torna *muito elevada* se comparada à abordagem original de mínimos quadrados, o que é um fato amplamente conhecido e discutido na comunidade de identificação de sistemas (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989; LJUNG, 1999). Ao aplicar a técnica das VI para o VRFT, a expressão da covariância, válida quando $N \rightarrow \infty$, é dada por (SÖDERSTRÖM, 2018)

$$Cov_{VI} = E[(\hat{\rho}_{VI} - E[\hat{\rho}_{VI}])(\hat{\rho}_{VI} - E[\hat{\rho}_{VI}])^T] \approx \frac{\Lambda_{VI}}{N}, \quad (132)$$

com a matriz $\Lambda_{VI} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ sendo definida pela expressão:

$$\Lambda_{VI} = R_{\varphi_{0F}}^{-1} \mathbf{R}_{VI} R_{\varphi_{0F}}^{-T}, \quad (133)$$

onde

$$\mathbf{R}_{VI} = E \left[\left(\sum_{i=0}^{\infty} \zeta_F(t+i) K_i \right) \sigma_w \left(\sum_{j=0}^{\infty} K_j^T \zeta_F(t+j)^T \right) \right] \quad (134)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} K_i q^i = F(q) C_d(q) [T_d(q)^{-1} - I] H_0(q). \quad (135)$$

É importante notar, a partir da equação (132), que é possível reduzir este indesejado erro de covariância ao aumentar o número de dados utilizados no VRFT. Vale lembrar que este aspecto de reduzir o erro na estimativa ao aumentar o número de dados não é possível no VRFT com mínimos quadrados.

Contudo, ao utilizar um número de dados limitado, a alta covariância que surge na metodologia de VRFT com VI também acaba prejudicando as propriedades dos sistemas resultantes em malha fechada. Neste sentido, por produzir estimativas não polarizadas, esta metodologia consegue atingir, na média, o desempenho especificado no modelo de referência. Por outro lado, devido a alta covariância de $\hat{\rho}_{VI}$, em algumas situações o sistema em malha fechada irá alcançar um desempenho muito distante daquele proposto em $T_d(q)$.

Na sequência da dissertação, é exibido um exemplo motivacional, no qual se aplica o VRFT com MQ e o VRFT com VI para sintonizar o controlador de um processo multivariável. O principal objetivo do exemplo é demonstrar as propriedades das técnicas estudadas acima de forma mais concreta, explicitando a baixa qualidade das estimativas e seu efeito nos sistemas de controle em malha fechada.

3.3.2 Exemplo motivacional

Com o propósito de demonstrar as propriedades estatísticas descritas na seção anterior, esta seção exhibe um exemplo numérico do método VRFT multivariável proposto em (CAMPESTRINI et al., 2016). No exemplo, a metodologia original (estimativa com mínimos quadrados) é comparada com a metodologia por variáveis instrumentais.

Considere o seguinte processo multivariável, também utilizado em exemplos nos trabalhos (FORMENTIN; SAVARESI, 2011; CAMPESTRINI et al., 2016):

$$G_0(q) = \begin{bmatrix} \frac{0,09516}{q - 0,9048} & \frac{0,03807}{q - 0,9048} \\ -0,02974 & \frac{0,04758}{q - 0,9048} \\ \frac{0,09516}{q - 0,9048} & \frac{0,03807}{q - 0,9048} \end{bmatrix}, \quad H_0(q) = I. \quad (136)$$

Deseja-se projetar um sistema de controle que alcance o seguinte modelo de referência:

$$T_d(q) = \begin{bmatrix} \frac{0,25}{q - 0,75} & 0 \\ 0 & \frac{0,4}{q - 0,6} \end{bmatrix}, \quad (137)$$

o qual garante erro nulo em regime permanente para seguimento de referências do tipo salto e desacoplamento entre as duas malhas. Para posterior comparação, o controlador ideal é calculado por meio de (36):

$$C_d(q) = \begin{bmatrix} \frac{2,012q - 1,902}{q - 1} & \frac{-2,69q + 2,434}{q - 1} \\ \frac{1,314q - 1,189}{q - 1} & \frac{6,725q - 6,085}{q - 1} \end{bmatrix}, \quad (138)$$

onde percebe-se que o mesmo é um controlador do tipo PI cheio. Como se deseja analisar o caso em que $C_d(q) \in \mathcal{C}$, a classe de controladores a ser sintonizada também é escolhida com esta estrutura, e então:

$$C(q, \rho) = \begin{bmatrix} \frac{\rho_{11}^0 q + \rho_{11}^1}{q - 1} & \frac{\rho_{12}^0 q + \rho_{12}^1}{q - 1} \\ \frac{\rho_{21}^0 q + \rho_{21}^1}{q - 1} & \frac{\rho_{22}^0 q + \rho_{22}^1}{q - 1} \end{bmatrix}. \quad (139)$$

É evidente que no cenário de controle baseado em dados não se conhece $G_o(q)$ e $C_d(q)$ e, assim sendo, a escolha da classe \mathcal{C} não pode ser feita desta maneira. Mas, como neste exemplo a prioridade é demonstrar as propriedades estatísticas dos métodos dentro do caso ideal, tal escolha foi assim realizada. Portanto, pela Premissa 2.1, pode-se definir $C_d(q) = C(q, \rho_0)$, com ρ_0 sendo o vetor de parâmetros ideais:

$$\rho_0 = [2,012; -1,902; -2,690; 2,434; 1,314; -1,189; 6,725; -6,085]^T. \quad (140)$$

Para a coleta de dados e da variável instrumental, dois experimentos em malha aberta foram simulados no processo, com uma entrada do tipo PRBS (*Pseudo-Random Binary Sequence*) de tamanho $N = 500$ e amplitude unitária. A variância do ruído branco $w(t)$ foi definida para garantir uma relação sinal ruído de 1,5 para cada saída, ou seja:

$$SNR_i = \frac{var[y_{0_i}]}{\sigma_{w_i}^2} = 1,5, \quad (141)$$

com $var[y_{0_i}]$ sendo a variância da saída i sem o efeito do ruído e $\sigma_{w_i}^2$ a variância do ruído $w_i(t)$ presente nesta saída. Perceba que esta relação é extremamente baixa, o que significa que existe uma quantidade muito elevada ruído no sistema. Escolheu-se inserir uma quantidade muito elevada de ruído neste sistema para mostrar, de forma mais explícita, as características indesejadas de cada formulação do VRFT. Cabe destacar, porém, que se fosse determinada uma menor quantidade de ruído, estas características teriam menor efeito, ou seja, a qualidade das estimativas seria melhor em cada cenário. Também, vale ressaltar que o filtro $F(q)$ empregado no exemplo foi $F(q) = T_d(q)[I - T_d(q)]$, seguindo a escolha prática proposta em (CAMPESTRINI et al., 2016).

Para aferir as propriedades das técnicas propostas na literatura, 500 rodadas de simulações Monte Carlo foram executadas com diferentes realizações do ruído. A cada rodada os dados de entrada e saída foram coletados e os parâmetros do controlador foram sintonizados conforme as formulações original e com variável instrumental do VRFT (foi utilizada a variável instrumental baseada em dados de um segundo experimento). Três diferentes critérios foram avaliados nesta análise:

- (i) As distribuições da função custo $J_y(\rho)$ observadas;
- (ii) As respostas no tempo dos sistemas em malha fechada a uma referência do tipo salto;
- (iii) Projeções do elipsoide que representa um intervalo de confiança de 95% para as estimativas;

Os dois primeiros critérios mostram o efeito das estimativas nos sistemas em malha fechada, que é o principal aspecto a ser avaliado no contexto de controle. O último, por sua vez, está relacionado com a qualidade das estimativas em si.

Primeiramente, se analisa o critério mais importante para a técnica aqui estudada, o $J_y(\rho)$. A partir dos parâmetros obtidos em cada rodada, o mesmo foi calculado como

$$J_y(\hat{\rho}) = \sum_{t=1}^N \|[T(q, \hat{\rho}) - T_d(q)]r(t)\|_2^2, \quad (142)$$

onde $r(t)$ foi definido como um vetor de dois saltos unitários: $r_1(t)$ ocorrendo no instante $t = 1$ e $r_2(t)$ ocorrendo em $t = 101$, com um total de $N = 200$.

A Figura 4 demonstra as distribuições de $J_y(\hat{\rho})$ observadas nas rodadas de Monte Carlo por meio de *diagramas de caixa* (ou *boxplots*, do inglês). Nesses diagramas, a linha central em vermelho representa a mediana das observações, a caixa em azul representa o intervalo entre 25% e 75% das amostras, enquanto as linhas pretas pontilhadas se estendem até os valores mais extremos que não são considerados discrepantes. O símbolo '+' em vermelho é usado para caracterizar as amostras mais discrepantes e os valores $+x$, no topo do diagrama, mostram quantas amostras ficaram acima do valor máximo que o gráfico compreende.

Um ponto importante a destacar nos diagramas de caixa é que os casos discrepantes não são considerados nos cálculos da mediana, da caixa e dos valores mais extremos. Tal ponto é importante pois no cenário do VRFT com VI, muitos sistemas ficaram instáveis e, portanto, apresentaram valores muito elevados para a função custo. Contudo, cabe ressaltar que nestes casos, tais custos foram considerados discrepantes e, portanto, não influenciaram no cálculo da mediana nem nos limites dos diagramas de caixa.

A Figura 4 mostra que a mediana do critério $J_y(\rho)$ para o VRFT com MQ apresentou valor de 17,3 e foi mais elevada se comparada ao VRFT com variáveis instrumentais, cuja mediana foi de 5,7. Claramente, a mediana é mais elevada no caso de VRFT com MQ devido ao erro de polarização que ocorre neste técnica, que se propaga para o desempenho em malha fechada e causa comportamentos distintos daqueles especificados em $T_d(q)$.

Por outro lado, é possível verificar que a elevada covariância das estimativas que resultam da técnica de variáveis instrumentais também acaba se refletindo nas funções objetivo $J_y(\rho)$. Pode-se notar, por exemplo, que o maior custo medido pelo diagrama de caixa foi de 32,23 e ainda, que 90 amostras foram consideradas discrepantes, o que é um número

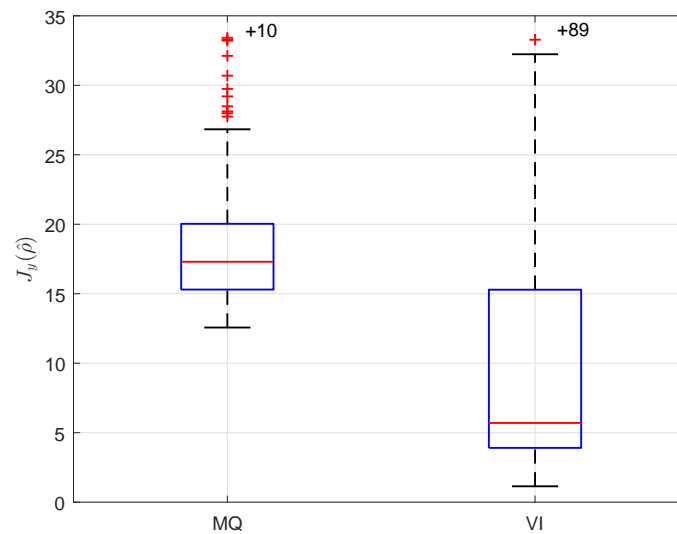


Figura 4: Comparação dos custos $J_y(\hat{\rho})$ para o VRFT com mínimos quadrados (MQ) e o VRFT com variável instrumental (VI).

elevado. Já nos valores de $J_y(\rho)$ resultantes de estimativas com MQ, a covariância é substancialmente menor. Neste caso, o maior valor medido pelo diagrama de caixa foi de 26,83, além de que somente 21 valores foram considerados discrepantes.

Outro fator analisado neste exemplo e que demonstra de forma concreta o efeito de cada técnica no VRFT é a resposta no tempo dos sistemas em malha fechada. Para compará-las, em cada rodada o sistema foi simulado com o controlador obtido e com a referência definida acima para o cálculo de $J_y(\hat{\rho})$. A Figura 5 exibe as respostas em malha fechada para os 500 controladores estimados utilizando o VRFT com MQ. Na figura, a linha preta representa o comportamento desejado e as linhas azuis os comportamentos atingidos.

Observando as respostas obtidas, é possível verificar que, na média, o comportamento transitório foi mais lento e com maior sobrepasso do que o especificado em $T_d(q)$. Ainda, um ponto fundamental a ser destacado é que nenhum dos sistemas resultantes foi levado à instabilidade.

Por outro lado, na Figura 6 é exibido o comportamento dos 500 sistemas em malha fechada alcançados com a técnica de variáveis instrumentais. Novamente, as linhas pretas representam o comportamento desejado, as linhas azuis representam as respostas de sistemas estáveis, enquanto as linhas vermelhas representam as respostas de sistemas que ficaram instáveis com o controlador estimado.

Ao observar a figura, nota-se que em alguns casos a resposta desejada foi atingida, ao contrário da metodologia com MQ. Porém, uma grande desvantagem que pode ser verificada é a grande variância das respostas, efeito que chega a instabilizar o sistemas em algumas situações. De forma mais precisa, constatou-se que 14,2% dos casos resultaram em sistemas instáveis.

Por fim, uma análise da qualidade das estimativas observadas nas rodadas de Monte Carlo foi desenvolvida, reforçando as propriedades já estudadas. Para tanto, o primeiro passo foi calcular os elipsoides de 8 dimensões que representam um intervalo de confiança de 95% das estimativas. Visto que é difícil realizar alguma comparação gráfica baseada

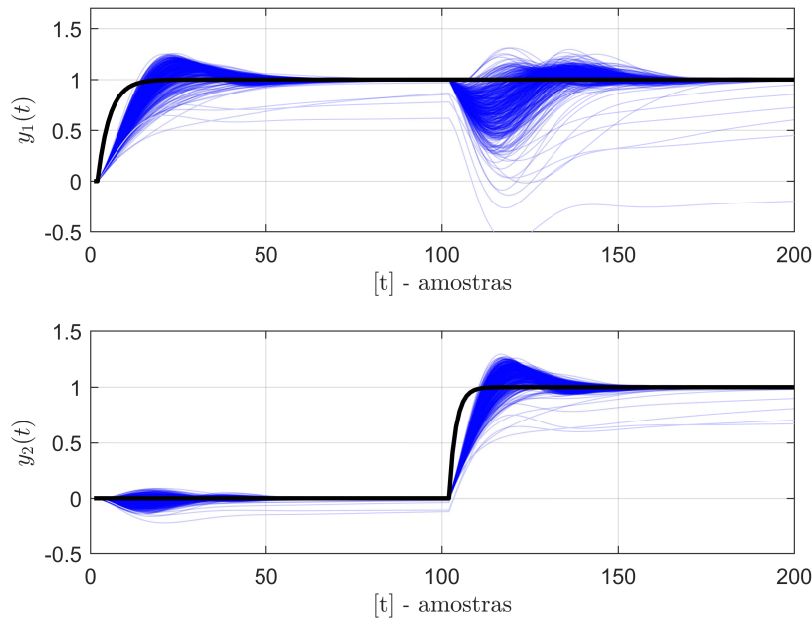


Figura 5: Comparação das respostas em malha fechada nas 500 rodadas de Monte Carlo - VRFT com mínimos quadrados.

no elipsoide, o mesmo foi projetado nos planos $\mathbb{P}_{11} = \rho_{11}^0 \times \rho_{11}^1$, $\mathbb{P}_{12} = \rho_{12}^0 \times \rho_{12}^1$, $\mathbb{P}_{21} = \rho_{21}^0 \times \rho_{21}^1$ e $\mathbb{P}_{22} = \rho_{22}^0 \times \rho_{22}^1$. A Figura 7 demonstra as projeções dos elipsoides nos planos \mathbb{P}_{11} (a) e \mathbb{P}_{12} (b). A Figura 8 mostra as projeções no plano \mathbb{P}_{21} , onde foi necessário detalhar a imagem (Figura 8-b) para tornar visível a projeção da elipse relativa à formulação com mínimos quadrados. A Figura 9 exibe as projeções no plano \mathbb{P}_{22} , onde também foi incluído um detalhamento maior, exposto na Figura 9-b.

Nas figuras, o símbolo ‘*’ em vermelho representa o ponto dos parâmetros ideais no plano respectivo, enquanto o símbolo ‘+’ em preto denota a média atingida com a estimativa por MQ e o símbolo ‘◇’ denota a média atingida com a estimativa por VI. A elipse em azul representa a projeção do elipsoide relativo às estimativas com MQ e a elipse em laranja representa a projeção do elipsoide relativo à técnica de VI.

Ao observar as figuras, conclui-se que as propriedades estatísticas de cada formulação foram ratificadas no exemplo. As estimativas obtidas por mínimos quadrados apresentaram uma polarização significativa, enquanto as obtidas com a técnica das variáveis instrumentais foram praticamente não polarizadas (nota-se a presença de uma pequena polarização, mas que pode ser explicada pelo número limitado de rodadas de Monte Carlo e de dados usados na sintonia). Ainda, constata-se que as projeções relativas à técnica das variáveis instrumentais resultaram em elipses muito maiores, o que representa a alta covariância das estimativas desta técnica.

A partir do exemplo, com a análise de diferentes critérios, é possível verificar as propriedades de cada metodologia do VRFT e, principalmente, suas consequências nos sistemas de controle resultantes. Fica claro que ao utilizar o VRFT pela formulação de mínimos quadrados, o usuário obtém estimativas polarizadas de ρ_0 e, conseqüentemente, desempenhos em malha fechada distintos daqueles desejados. Também, nota-se que utilizando a técnica de variáveis instrumentais, elimina-se o problema da polarização. Contudo, o exemplo também mostra a grande desvantagem desta metodologia: a covariância extremamente elevada das estimativas. É possível verificar que esta propriedade também prejudica o comportamento dos sistemas de controle em algumas situações, e pode até

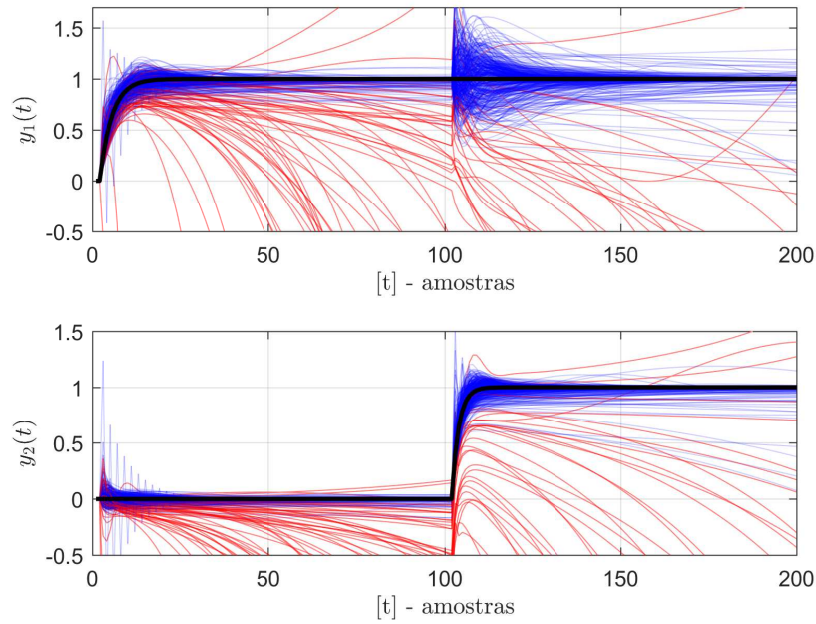


Figura 6: Comparação das respostas em malha fechada nas 500 rodadas de Monte Carlo - VRFT com variáveis instrumentais.

resultar em sistemas instáveis.

Assim, a grande motivação deste trabalho é evidenciada: as propriedades das estimativas fornecidas pelas formulações padrão do VRFT MIMO são muito pobres quando o ruído é significativo no processo e acabam, por conseguinte, degradando o desempenho dos sistemas em malha fechada de forma considerável. Por isto, o principal objetivo da dissertação é aprimorar estas propriedades ao incluir regularização na formulação do VRFT MIMO com VI.

3.4 Considerações finais

Este capítulo introduziu ao leitor as formulações padrão, já existentes e consolidadas na literatura, do método de controle baseado em dados conhecido como VRFT. Inicial-

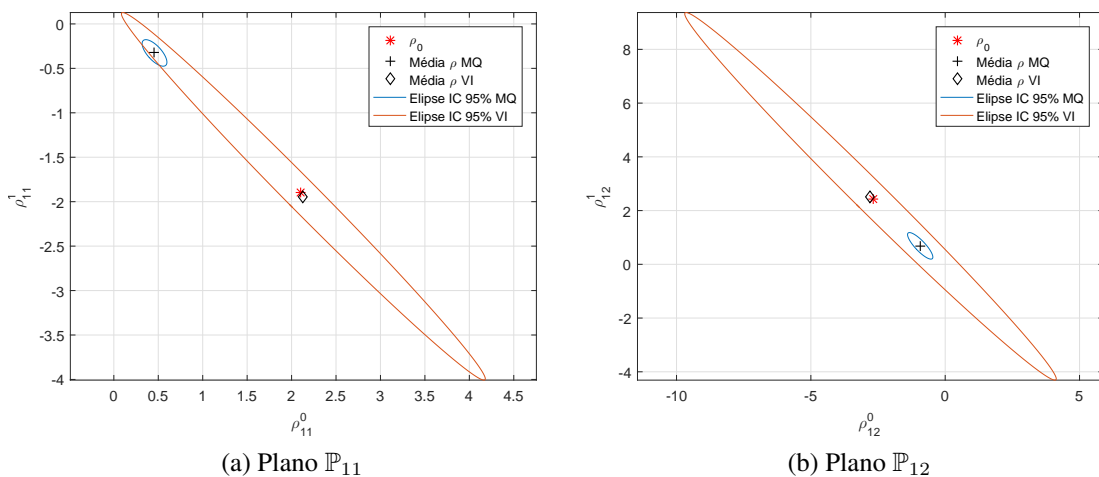


Figura 7: Projeções dos elipsoides nos planos \mathbb{P}_{11} e \mathbb{P}_{12} para cada técnica.

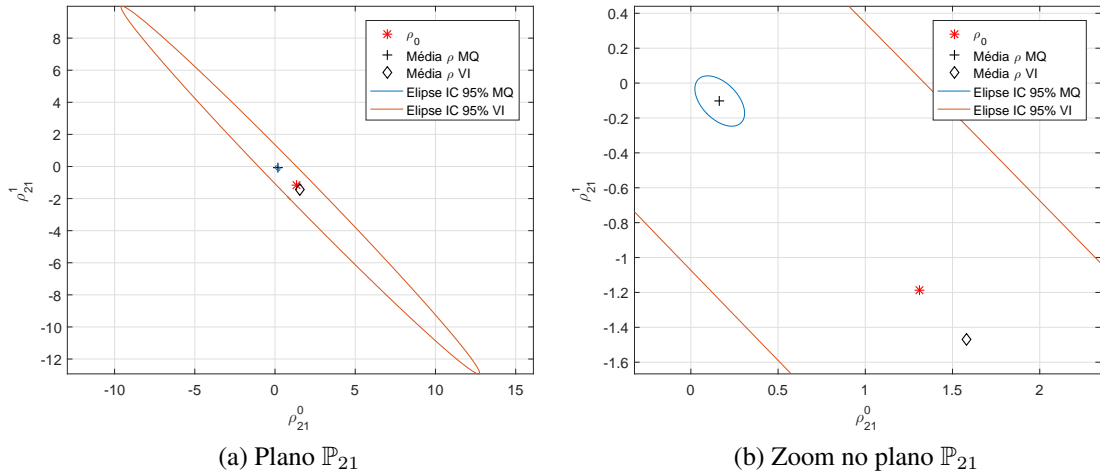


Figura 8: Projeções dos elipsoides no plano \mathbb{P}_{21} para cada técnica.

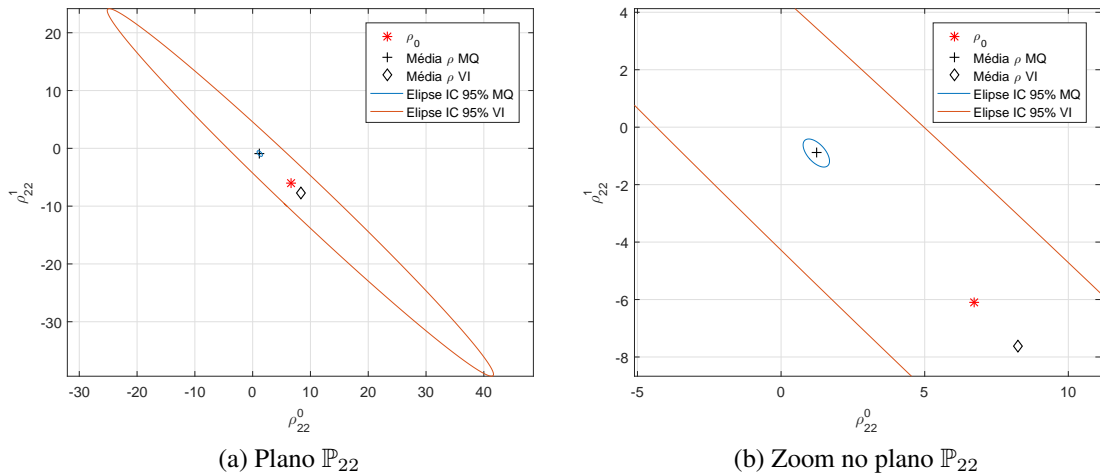


Figura 9: Projeções dos elipsoides no plano \mathbb{P}_{22} para cada técnica.

mente, a Seção 3.1 descreveu o VRFT monovariável, primeiro a surgir na literatura e mais acessível para a compreensão de suas características. Foi explicada a principal ideia do método, que consiste em reescrever o problema de otimização do critério $J_y(\rho)$, em um problema de identificação do controlador ideal, onde minimiza-se o critério $J_{VR}(\rho)$. Mostrou-se, por meio da aplicação do Teorema de Parseval nas funções custo, que dentro da situação ideal a otimização dos dois critérios resulta no mesmo mínimo. Ainda, em uma análise similar, mostrou-se que fora do caso ideal o filtro $F(q)$ deve ser projetado como $F(q) = T_d(q)[1 - T_d(q)]$ com o objetivo de aproximar as duas funções.

Na sequência, a Seção 3.2 discutiu a formulação multivariável do método VRFT. Primeiramente, foi apresentada a formulação mais primitiva e restritiva, e as condições para que a mesma fosse, de fato, uma extensão multivariável do método. Em seguida, a formulação mais recente e mais coerente foi apresentada, na qual se mantém-se a ideia de reescrever o critério de otimização de $J_y(\rho)$ em um critério de identificação do controlador ideal. Ainda nesta seção, foi realizado um procedimento equivalente ao da seção anterior para mostrar que o mínimo dos critérios coincide no caso ideal. Tal procedimento também forneceu uma escolha de viés prático para o projeto do filtro $F(q)$ no caso não ideal, que se resume a uma extensão do projeto do filtro monovariável: $F(q) = T_d(q)[I - T_d(q)]$.

Na Seção 3.3 o problema de utilizar dados com ruído no VRFT foi abordado de forma genérica, ou seja, válido para as formulações SISO e MIMO. Foram discutidas as propriedades das estimativas de ρ_0 com a formulação original (MQ), enfatizando que a mesma possui uma deficiência: o erro de polarização. Assim, como alternativa, mostrou-se a proposta de utilizar a técnica das variáveis instrumentais. Suas propriedades também foram discutidas e sua principal desvantagem também foi destacada: o elevado erro de covariância.

Finalmente, um exemplo demonstrando as propriedades citadas foi desenvolvido. No exemplo, verificou-se que a baixa qualidade das estimativas de MQ e VI se propaga para o desempenho dos sistemas em malha fechada, degradando-o de forma significativa em relação ao desempenho desejado. Dessa forma, ficou evidente a motivação do trabalho, que busca aprimorar as propriedades do VRFT MIMO com VI, reduzindo o erro de covariância, de forma análoga ao que foi desenvolvido em (RALLO et al., 2016). Espera-se que, com isto, também sejam aprimorados os resultados em malha fechada.

4 IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS COM REGULARIZAÇÃO

Neste capítulo será apresentado o estado da arte do problema de identificação de sistemas com regularização, com o intuito de introduzir as principais ideias por trás desta ferramenta e que são fundamentais para sua posterior aplicação no método VRFT. Logo, é interessante que o leitor esqueça, por um breve momento, o problema de controlar o processo descrito em (1) e considere o problema de identificação do mesmo. O problema de identificar o controlador ideal, como é proposto no VRFT, ainda não é levado em consideração, visto que possui características um pouco diferentes. Este assunto será abordado no próximo capítulo do trabalho.

Apesar de ser uma ferramenta já conhecida na comunidade de identificação de sistemas, a regularização ganhou bastante destaque nos últimos anos em virtude dos trabalhos inovadores expostos em (PILLONETTO; DE NICOLAO, 2010; PILLONETTO; CHIUSO; DE NICOLAO, 2011), que mostram uma perspectiva Bayesiana para identificar a resposta ao impulso de sistemas dinâmicos. Esta perspectiva tem sido amplamente utilizada e desenvolvida na comunidade de *Machine Learning*.

Inspirado por estes trabalhos os artigos (CHEN; OHLSSON; LJUNG, 2012; PILLONETTO et al., 2014) trazem esta perspectiva de forma mais acessível para a comunidade de controle e identificação, relacionando-a com técnicas de identificação de modelos paramétricos e fornecendo ideias para a regularização com base em informações a priori observadas sobre o sistema, como, por exemplo, a estabilidade e característica exponencial da resposta ao impulso. A grande ideia explorada em (CHEN; OHLSSON; LJUNG, 2012; PILLONETTO et al., 2014) é estimar a resposta ao impulso de sistemas monovariáveis através de modelos do tipo FIR de alta ordem, adicionando uma regularização do tipo \mathcal{L}_2 no problema. Com isto, os autores mostram que é possível gerenciar de forma mais adequada o compromisso entre polarização e covariância que surge neste tipo de problema, minimizando uma grandeza que é composta por estas duas medidas: a matriz de *Mean Square Error* (MSE).

Dessa forma, para contextualizar o problema, a Seção 4.1 apresenta a metodologia clássica de identificação de sistemas dinâmicos, enfatizando o caso de modelos do tipo FIR. A solução do problema, por meio do conhecido método dos mínimos quadrados ponderados, também é brevemente apresentada, assim como as propriedades destas estimativas. Já na Seção 4.2 uma extensão para a identificação com regularização de sistemas multivariáveis é exposta. Primeiramente, se introduz o método dos *mínimos quadrados ponderados regularizado*. Também, a interpretação Bayesiana do processo de identificação é explicada, fornecendo novas e importantes ideias para o uso de regularização. Em 4.2.2, são expostas as diferentes formas de parametrizar a matriz de regularização e como

obter estimativas para seus *hiperparâmetros*. Em seguida, as propriedades da identificação com regularização e a matriz ótima de regularização são demonstradas. Por fim, um exemplo numérico demonstrando o efeito da regularização na função custo de erro de predição encerra o capítulo.

4.1 Identificação pela abordagem clássica

No contexto clássico de identificação de sistemas, escolhe-se uma estrutura de modelos parametrizada \mathcal{M} para representar a relação entrada-saída do processo. O vetor de parâmetros é denotado por $\theta \in \mathbb{R}^{n_t}$ e, então, $\mathcal{M}(\theta)$ representa um modelo específico dentro desta estrutura (PILLONETTO et al., 2014). Para modelos de processos discretos, lineares e invariantes no tempo, como aquele que é o foco de estudo nesta dissertação e descrito em (1), uma estrutura genérica é dada por:

$$y(t, \theta) = G(q, \theta)u(t) + H(q, \theta)w(t), \quad (143)$$

onde $G(q, \theta)$ e $H(q, \theta)$ são as matrizes de transferência, semelhantes às descritas no Capítulo 2, mas agora parametrizadas pelo vetor θ . A expansão de $G(q, \theta)$ e $H(q, \theta)$ no operador de atraso no tempo q^{-1} resulta na resposta ao impulso destes sistemas:

$$G(q, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(\theta)q^{-k} \quad (144)$$

$$H(q, \theta) = I + \sum_{k=1}^{\infty} h_k(\theta)q^{-k}, \quad (145)$$

com $g_k(\theta)$ e $h_k(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sendo matrizes que contêm o k -ésimo coeficiente da respectiva resposta ao impulso para cada par entrada-saída (no caso de G) ou ruído-saída (no caso de H). Se $H(q, \theta)$ é inversamente estável, então os modelos $G(q, \theta)$ e $H(q, \theta)$ são usados para se escrever o *preditor ótimo* (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989):

$$\hat{y}(t, \theta) = H(q, \theta)^{-1}G(q, \theta)u(t) + [I - H(q, \theta)^{-1}]y(t), \quad (146)$$

o qual é utilizado nos conhecidos algoritmos de identificação por minimização do erro de predição.

Existem diferentes formas para parametrizar os modelos $G(q, \theta)$ e $H(q, \theta)$. Neste sentido, as estruturas mais comuns são as do tipo FIR, ARX (*AutoRegressive with eXogenous inputs*), ARMAX (*AutoRegressive Moving Average with eXogenous inputs*) e OE (*Output Error*) (LJUNG, 1999; SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989). Contudo, para estimar os parâmetros de estruturas do tipo ARMAX e OE por minimização de erro de predição, por exemplo, deve-se resolver um problema de otimização não convexo, que pode resultar em mínimos locais e, possivelmente, em problemas mal condicionados (CHEN; OHLSSON; LJUNG, 2012).

Como alternativa, uma maneira mais simples para estimar $G(q, \theta)$ é truncar a expansão de (144) em um número finito, resultando em um modelo do tipo FIR (usualmente de alta ordem). Com isto, ao aplicar a técnica de minimização do erro de predição, obtém-se um problema de regressão linear, que possui solução mais simples. No entanto, ao estimar modelos FIR de alta ordem por esta metodologia tradicional, a covariância das estimativas se torna extremamente elevada, inviabilizando este tipo de identificação comparada à metodologia de minimização de erro de predição de modelos ARMAX e/ou OE. Contudo,

nos trabalhos (CHEN; OHLSSON; LJUNG, 2012; PILLONETTO et al., 2014), mostra-se que, ao adicionar regularização no problema de identificação de modelos FIR de alta ordem, é possível aprimorar as propriedades das estimativas, tornando esta metodologia mais apropriada em relação à identificação de modelos ARMAX e/ou OE. Por isto, na sequência do texto, o problema de identificação de sistemas FIR é discutido com maior detalhe.

Em estruturas do tipo FIR, a resposta ao impulso de $G(q, \theta)$, descrita em (144), tem *suporte finito* e $H(q, \theta)$ é definida como $H(q) = I$. Portanto, a saída do sistema é expressa por

$$y(t, \theta) = \sum_{k=0}^m g_k(\theta) u(t - k) + w(t), \quad (147)$$

onde todas as respostas ao impulso foram aqui truncadas até o coeficiente m , sem perda de generalidade. Assim, escreve-se a matriz $g_k(\theta)$ como:

$$g_k(\theta) = \begin{bmatrix} \theta_{11}^k & \theta_{12}^k & \cdots & \theta_{1n}^k \\ \theta_{21}^k & \theta_{22}^k & \cdots & \theta_{2n}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{n1}^k & \theta_{n2}^k & \cdots & \theta_{nn}^k \end{bmatrix}, \quad (148)$$

com cada θ_{ij}^k representando o k -ésimo coeficiente da resposta ao impulso da entrada j para saída i .

Uma maneira mais conveniente de escrever o sistema FIR é na forma de *regressão linear*, ou seja:

$$y(t, \theta) = \varphi(t)^T \theta + w(t), \quad (149)$$

com θ de dimensão $n_t = n^2 m$ e $\varphi(t)^T \in \mathbb{R}^{n \times n^2 m}$ sendo uma matriz de vetores regressores (aqui é importante não confundir com a matriz de vetores regressores do capítulo anterior). Mais especificamente, para deixar mais clara a notação aqui utilizada, a equação acima é expandida, mostrando o formato multivariável do sistema:

$$\begin{bmatrix} y_1(t, \theta_1) \\ y_2(t, \theta_2) \\ \vdots \\ y_n(t, \theta_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1^T(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varphi_2^T(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \varphi_n(t)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ \vdots \\ w_n(t) \end{bmatrix}, \quad (150)$$

onde $\theta_i \in \mathbb{R}^{nm}$ e $\varphi_i(t)^T \in \mathbb{R}^{1 \times nm}$ são, respectivamente, o vetor de parâmetros e o vetor regressor relativos à i -ésima saída. Ainda, pode-se detalhar ambos os vetores. O vetor regressor é composto por sinais de entrada atrasados, ou seja:

$$\varphi_i(t)^T = [\varphi_{u1}(t)^T \ \varphi_{u2}(t)^T \ \cdots \ \varphi_{un}(t)^T], \quad (151)$$

$$\varphi_{uj}(t)^T = [u_j(t) \ u_j(t-1) \ u_j(t-2) \ \cdots \ u_j(t-m)], \quad (152)$$

com cada $\varphi_{uj}(t)$ sendo relacionado a j -ésima entrada. O vetor de parâmetros, por sua vez, é discriminado da seguinte forma:

$$\theta_i = [\theta_{i1}^T \ \theta_{i2}^T \ \cdots \ \theta_{in}^T]^T, \quad (153)$$

$$\theta_{ij} = [\theta_{ij}^0 \ \theta_{ij}^1 \ \theta_{ij}^2 \ \cdots \ \theta_{ij}^m]^T, \quad (154)$$

sendo, então, que cada θ_{ij} está relacionado com a i -ésima saída e j -ésima entrada e o sobrescrito denota o k -ésimo coeficiente da resposta impulsiva, como descrito logo acima.

Outro modo interessante de escrever o sistema FIR, que será explorado de forma recorrente na sequência, visto que simplifica a notação e facilita a aferição de algumas propriedades, é a forma vetorial, onde se acumulam todos os instantes de tempo no mesmo vetor. Assim, escreve-se:

$$Y = \phi\theta + W, \quad (155)$$

onde agora $Y \in \mathbb{R}^{Nn}$ e $W \in \mathbb{R}^{Nn}$ contêm todos os vetores de saída e ruído dos instantes de tempo $t = 1$ até $t = N$, isto é:

$$Y = [y_1(1, \theta_1), \dots, y_1(N, \theta_1) | y_2(1, \theta_2), \dots, y_2(N, \theta_2) | \dots | y_n(1, \theta_n), \dots, y_n(N, \theta_n)]^T, \quad (156)$$

$$W = [w_1(1), \dots, w_1(N) | w_2(1), \dots, w_2(N) | \dots | w_n(1), \dots, w_n(N)]^T, \quad (157)$$

e a matriz de covariância do ruído W é definida como

$$E[WW^T] = \sigma_w^2 \otimes I_N = \Sigma, \quad (158)$$

com $\Sigma \in \mathbb{R}^{Nn \times Nn}$, \otimes denotando o *produto de Kronecker* e I_N denotando a matriz identidade de dimensão $N \times N$. Da forma que foi organizada, a matriz ϕ , que contém os vetores regressores, é estruturada como:

$$\phi = \text{diag}(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n), \quad (159)$$

com $\phi \in \mathbb{R}^{Nn \times n^2m}$ e $\text{diag}(\cdot)$ simbolizando uma matriz bloco diagonal, onde cada ϕ_i é composto por

$$\phi_i = [\varphi_i(1) \quad \varphi_i(2) \quad \dots \quad \varphi_i(N)]^T, \quad \phi_i \in \mathbb{R}^{N \times nm}. \quad (160)$$

4.1.1 O método dos mínimos quadrados ponderado - MQP

Para estimar os parâmetros do modelo FIR multivariável, a abordagem clássica de identificação consiste em minimizar o erro entre a saída observada em um experimento e a saída calculada pelo preditor ótimo (LJUNG, 1999). Uma vez que o sistema de maior interesse nesta dissertação é do tipo FIR e, portanto, pode ser escrito na forma de uma regressão linear, a estimativa de seus parâmetros pode ser calculada, em uma forma genérica, por meio do conhecido algoritmo dos *mínimos quadrados ponderados* (MQP):

$$\hat{\theta}_{MQP} = \arg \min_{\theta} J_{MQP}(\theta) \quad (161)$$

$$J_{MQP}(\theta) = \|Y - \hat{Y}\|_M^2 = \|Y - \phi\theta\|_M^2, \quad (162)$$

onde $\|x\|_M^2$ denota a norma quadrática $x^T M x$, com $M \in \mathbb{R}^{Nn \times Nn}$ sendo uma matriz positiva definida. Então, supondo que $\phi^T M \phi$ é inversível, o problema de otimização apresentado acima é convexo e possui um único mínimo, que pode ser determinado de forma analítica por:

$$\hat{\theta}_{MQP} = (\phi^T M \phi)^{-1} (\phi^T M Y). \quad (163)$$

Na prática, o algoritmo mais utilizado para identificação de modelos FIR é o *mínimos quadrados ordinário*¹, que na verdade é um caso particular do MQP. Quando a matriz de ponderação M é escolhida como a matriz identidade, então o MQP será idêntico ao MQ. Porém, por motivos que serão evidenciados na sequência do texto, aqui será estudada a versão ponderada do famoso algoritmo.

¹Também referido nesta dissertação como mínimos quadrados, ou MQ.

4.1.2 Propriedades da estimativa por MQP

Com o objetivo de avaliar a qualidade das estimativas, são expostas as propriedades das estimativas obtidas pelo método MQP. Para isso, suponha que o sistema real seja, de fato, um sistema FIR (ou que a hipótese realizada ao truncar a resposta ao impulso do sistema é razoável). Considere, então, que os dados de entrada e saída são tais que respeitem a seguinte relação:

$$y(t, \theta_0) = \varphi(t)^T \theta_0 + w(t), \quad (164)$$

ou seja, existe um vetor de parâmetros ideais θ_0 , que se deseja estimar. Cabe ressaltar que esta situação é análoga ao caso em que o controlador ideal pertence a classe \mathcal{C} , estudado no capítulo anterior. A relação acima também pode ser expandida na forma vetorial, isto é:

$$Y = \phi \theta_0 + W. \quad (165)$$

Neste contexto, a primeira propriedade de interesse a ser examinada é a polarização. Dessa forma, para verificar se ocorre polarização na estimativa, é necessário calcular o valor esperado da mesma:

$$E[\hat{\theta}_{MQP}] = E[(\phi^T M \phi)^{-1} (\phi^T M Y)] \quad (166)$$

$$= E[(\phi^T M \phi)^{-1} (\phi^T M \phi) \theta_0] + E[(\phi^T M \phi)^{-1} (\phi^T M W)]. \quad (167)$$

Analisando a equação (167), nota-se que o primeiro termo é igual a θ_0 . Além disso, pode-se afirmar que o segundo termo é zero, uma vez que as matrizes ϕ e M são compostas somente por quantidades determinísticas e $E[W] = 0$. Conclui-se, portanto, que:

$$E[\hat{\theta}_{MQP}] = \theta_0, \quad (168)$$

provando que a estimativa é não polarizada.

Outra propriedade fundamental das estimativas é sua covariância. Para o estimador de MQP, tem-se a seguinte relação (LJUNG, 1999):

$$Cov_{MQP}(M) = E[(\hat{\theta}_{MQP} - \theta_0)(\hat{\theta}_{MQP} - \theta_0)^T] \quad (169)$$

$$= E[(\phi^T M \phi)^{-1} (\phi^T M W)] [(\phi^T M \phi)^{-1} (\phi^T M W)]^T \quad (170)$$

$$= (\phi^T M \phi)^{-1} \phi^T M \Sigma M \phi (\phi^T M \phi)^{-1}. \quad (171)$$

Uma observação interessante, realizada em (LJUNG, 1999), a respeito da covariância descrita acima é que se for feita a seguinte escolha: $M = \Sigma^{-1}$ (desde que essa grandeza seja conhecida), então é possível minimizar a matriz descrita acima no seguinte sentido $Cov_{MQP}(M) \geq Cov_{MQP}(\Sigma^{-1})$, $\forall M > 0$.

Finalmente, apresenta-se um conceito muito importante na análise de qualidade das estimativas, a matriz de *Mean Square Error*.

Definição 4.1. A matriz de Mean Square Error da estimativa é definida por:

$$MSE = E[(\hat{\theta} - \theta_0)(\hat{\theta} - \theta_0)^T] = Bias Bias^T + Cov, \quad (172)$$

com *Bias* denotando o vetor de polarização da estimativa e *Cov* sua matriz de covariância.

A matriz de MSE, apresentada acima, é a principal medida de qualidade de uma estimativa, visto que engloba o erro de polarização e o erro de covariância. Para o caso de identificação do modelo FIR por meio dos MQP, como não há polarização, conclui-se que

$$MSE_{MQP}(M) = Cov_{MQP}(M). \quad (173)$$

Um fato relevante, que deve ser destacado aqui, é que todas estas propriedades são válidas mesmo para uma quantidade finita de dados N , em contraste com as propriedades estudadas no capítulo anterior, onde foi considerado o caso assintótico, i.e. $N \rightarrow \infty$. Isto ocorre pois, no caso de sistemas do tipo FIR, o vetor regressor possui somente valores da entrada e da entrada atrasada, que são grandezas determinísticas. Com isto, o próprio vetor regressor é classificado como uma grandeza determinística, tornando a análise das propriedades mais simples em relação a estruturas de modelos mais complexas.

Conforme discutido em (CHEN; OHLSSON; LJUNG, 2012), uma dificuldade que surge ao identificar sistemas FIR de alta ordem é que a covariância das estimativas aumenta de forma significativa com a ordem do modelo. Consequentemente, isto aumenta a MSE e prejudica a qualidade das estimativas. Portanto, para contrapor esta elevada covariância, os autores propõem o uso de *regularização*, ferramenta que adiciona uma *pequena* polarização nas estimativas, mas reduz consideravelmente sua covariância. Isto posto, a próxima seção do texto demonstra a introdução de regularização no problema, assim como seus efeitos nas estimativas.

4.2 Mínimos quadrados ponderados regularizado - MQPR

Esta seção apresenta uma das contribuições desta dissertação, uma vez que propõe a introdução da regularização para o caso dos MQP, com o intuito de tratar do problema no contexto de sistemas multivariáveis. Até o presente momento na literatura, a ferramenta de regularização foi analisada de forma mais detalhada somente para estimativas obtidas com o método dos MQ, voltada ao cenário de sistemas monovariáveis. Já no contexto de sistemas multivariáveis, este tema é abordado na literatura de forma superficial, sem uma análise detalhada das propriedades das estimativas e sem a dedução da matriz de regularização ótima para este contexto.

Então, visando regularizar a estimativa dos MQP, é necessário adicionar um termo de regularização no critério. Nos trabalhos (CHEN; OHLSSON; LJUNG, 2012; PILLO-NETTO et al., 2014), a regularização do tipo \mathcal{L}_2 é proposta no problema dos mínimos quadrados ordinários, o que significa adicionar um termo $\theta^T P^{-1} \theta$ no critério. De forma semelhante, nesta dissertação a regularização será adicionada ao problema de MQP, resultando nos *mínimos quadrados ponderados regularizados*, ou MQPR. Dessa forma, a estimativa será obtida ao resolver o seguinte problema:

$$\hat{\theta}_R = \arg \min_{\theta} J_{MQP}^R(\theta) \quad (174)$$

$$J_{MQP}^R(\theta) = J_{MQP}(\theta) + \theta^T P^{-1} \theta, \quad (175)$$

com $P \in \mathbb{R}^{n_t \times n_t}$ sendo uma matriz positiva semi-definida, denominada de *matriz de regularização* ou, como na comunidade de Machine Learning, de *kernel*. O problema acima também é convexo e possui a seguinte solução analítica:

$$\hat{\theta}_R = (P\phi^T M\phi + I)^{-1} P\phi^T MY. \quad (176)$$

É importante ressaltar que, se P é uma matriz singular, então a equação (175) não é definida de forma apropriada. Neste caso, deve-se realizar a decomposição de valor singular de P , para reescrever o problema de otimização (PILLONETTO et al., 2014):

$$P = [V_1 \ V_2] \begin{bmatrix} \Lambda_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}, \quad (177)$$

onde Λ_p é uma matriz diagonal e seus elementos são os valores singulares positivos de P . A matriz $V = [V_1 \ V_2]$ é ortogonal e V_1 possui o mesmo número de colunas de Λ_p . A partir da decomposição, o problema de otimização é reescrito da seguinte maneira:

$$\hat{\theta}_R = \arg \min_{\theta} J_{MQP}^R(\theta) \quad (178)$$

$$J_{MQP}^R(\theta) = J_{MQP}(\theta) + \theta^T V_1 \Lambda_p^{-1} V_1^T \theta \quad (179)$$

$$\text{s.a. } V_2^T \theta = 0, \quad (180)$$

que, por sua vez, também apresenta a solução descrita em (176).

Ao introduzir regularização no problema, a função custo $J_{MQP}^R(\theta)$ pode ser interpretada como uma combinação entre o critério original $J_{MQP}(\theta)$ e a parcela $\theta^T P^{-1} \theta$. É fácil perceber que o mínimo da segunda ocorre quando $\theta = 0$ e, então, a nova estimativa será uma ponderação *não linear* entre $\hat{\theta}_{MQP}$ e $^2\theta = 0$. O peso que prioriza a otimização de um critério em relação ao outro é definido pela escolha da matriz P . Contudo, escolher esta matriz sem nenhuma informação adicional e nenhuma perspectiva de seu efeito nas propriedades da estimativa pode ser contraproducente. À vista disto, a sequência do texto traz uma diferente visão sobre o processo de identificação do sistema, que acaba fornecendo meios para definir a escolha da matriz P .

4.2.1 A interpretação Bayesiana

A interpretação Bayesiana do processo de identificação é baseada no *Teorema de Bayes*, que tem origem na teoria das probabilidades. Este importante e conhecido teorema é utilizado em diversas aplicações e em diferentes áreas, desde a medicina, onde é utilizado para o cálculo da probabilidade de ocorrer falsos positivos e/ou negativos em exames, até as aplicações sofisticadas de filtragem e controle ótimo, como apresentado em (ANDERSON; MOORE, 1979). O teorema descreve a probabilidade condicional (ou *a posteriori*) de ocorrer um evento aleatório A , a partir de informações *a priori* de um outro evento B relacionado a A . Matematicamente, esta relação é expressa da seguinte forma:

$$\mathcal{P}(A|B) = \frac{\mathcal{P}(B|A)\mathcal{P}(A)}{\mathcal{P}(B)}, \quad (181)$$

com $\mathcal{P}(x)$ denotando a probabilidade de ocorrer o evento x e $\mathcal{P}(x|y)$ sendo a probabilidade condicional ou a posteriori de ocorrer x , dado que ocorreu o evento y .

Porém, antes de apresentar a perspectiva Bayesiana do procedimento de identificação, é importante mostrar o seguinte resultado. Sejam $x_1 \in \mathbb{R}^{n_{x1}}$ e $x_2 \in \mathbb{R}^{n_{x2}}$ duas variáveis aleatórias conjuntamente Gaussianas, onde $x = [x_1 \ x_2]^T \in \mathbb{R}^{n_x}$. A *função densidade de probabilidade* da variável x é descrita por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n_x} |\Gamma|}} e^{-\frac{1}{2}(x-m)^T \Gamma^{-1} (x-m)}, \quad (182)$$

²O fato de ser uma ponderação não linear implica que a nova estimativa não irá cair estritamente na direção da reta que liga $\hat{\theta}_{MQP}$ e $\theta = 0$.

onde $|\cdot|$ denota o operador determinante, m é a média da variável x e Γ é sua covariância. Uma maneira mais sucinta de descrever a variável aleatória x é a seguinte:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \sim \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \right), \quad (183)$$

com $x \sim \mathcal{N}(m, \Gamma)$ simbolizando uma variável Gaussiana com média m e covariância Γ . Então, a densidade condicional de x_1 dado que se conhece x_2 é calculada por (PILLONETTO et al., 2014):

$$\begin{cases} x_1|x_2 \sim \mathcal{N}(m_1^{post}, \Gamma_1^{post}) \\ m_1^{post} = m_1 + \Gamma_{12}\Gamma_{22}^{-1}(x_2 - m_2) \\ \Gamma_1^{post} = \Gamma_{11} - \Gamma_{22}^{-1}\Gamma_{21}. \end{cases} \quad (184)$$

Estes resultados serão utilizados na sequência do texto para demonstrar a estimativa dos parâmetros θ por meio da interpretação Bayesiana do processo de identificação.

Ao abordar o problema de identificação do sistema FIR pela abordagem Bayesiana, o próprio vetor de coeficientes das respostas ao impulso θ é considerado uma variável aleatória Gaussiana. Note que tal perspectiva difere da tradicional, na qual os coeficientes da resposta ao impulso são variáveis determinísticas, mas desconhecidas. Uma vez que a princípio não se tem informação sobre o valor de θ , supõe-se que o mesmo tem média zero e uma determinada matriz de covariância Π , i.e. (PILLONETTO et al., 2014):

$$\theta \sim \mathcal{N}(0, \Pi). \quad (185)$$

Além disso, assume-se que o ruído $w(t)$ é Gaussiano, independente de θ (o que é uma hipótese razoável) e que W tenha uma matriz de covariância Σ , conforme definido em (158). Portanto, a partir da relação entre as variáveis Y e θ , expressa em (155), conclui-se que ambas são conjuntamente Gaussianas e apresentam a seguinte distribuição (PILLONETTO et al., 2014):

$$\begin{bmatrix} \theta \\ Y \end{bmatrix} \sim \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Pi & \Pi\phi^T \\ \phi\Pi & \phi\Pi\phi^T + \Sigma \end{bmatrix} \right). \quad (186)$$

Enfim, a identificação dos parâmetros pela perspectiva Bayesiana consiste em calcular o valor para o qual a probabilidade condicional de ocorrer θ , dado que se mede a saída Y , atinge seu valor máximo. Usando o teorema de Bayes, isto pode ser traduzido matematicamente como

$$\hat{\theta}_B = \arg \max_{\theta} f(\theta|Y) = \frac{f(Y|\theta)f(\theta)}{f(Y)}, \quad (187)$$

onde $\hat{\theta}_B$ denota a estimativa dos parâmetros pela interpretação Bayesiana, $f(Y|\theta)$ é a função densidade condicional de Y dado θ e $f(\theta)$ e $f(Y)$ são as funções densidades a priori de Y e θ . Este tipo de estimativa também é conhecido como *maximum a posteriori estimate* (MAP) (LJUNG, 1999) e para o caso de variáveis aleatórias Gaussianas é dada pelo valor médio da distribuição. Assim, de forma análoga ao desenvolvido em (184), pode-se calcular $\hat{\theta}_B$:

$$\theta|Y \sim \mathcal{N}(\hat{\theta}_B, \Pi_B^{apost}) \quad (188)$$

$$\hat{\theta}_B = \Pi\phi^T(\phi\Pi\phi^T + \Sigma)^{-1}Y \quad (189)$$

$$\Pi_B^{apost} = \Pi - \Pi\phi^T(\phi\Pi\phi^T + \Sigma)^{-1}\phi\Pi. \quad (190)$$

A partir da expressão (189), ainda não é perceptível a relação deste tipo de estimativa com a estimativa por MQPR. Porém, com alguma manipulação algébrica e aplicando a seguinte relação matricial $A(I + BA)^{-1} = (AB + I)^{-1}A$, é possível chegar na seguinte equação para a estimativa Bayesiana:

$$\hat{\theta}_B = (\Pi\phi^T\Sigma^{-1}\phi + I)^{-1}\Pi\phi^T\Sigma^{-1}Y. \quad (191)$$

Agora, ao analisar as equações (191) e (176), é possível afirmar que a identificação dos parâmetros pela técnica dos MQPR é equivalente à identificação pela perspectiva Bayesiana, desde que a matriz de ponderação M seja igual à inversa da matriz de covariância do ruído W , i.e. $M = \Sigma^{-1}$, e a matriz de regularização P seja igual à covariância *a priori* do vetor de parâmetros, i.e. $P = \Pi$. Portanto, ao realizar estas escolhas no método de MQPR, diz-se que a regularização é uma *regularização Bayesiana*.

Esta análise indica como escolher as matrizes M e P no método MQPR para estimar sistemas FIR, além de reforçar o fato, já conhecido na literatura, de que regularização está estreitamente ligada a estimativas *a priori* (CHEN; OHLSSON; LJUNG, 2012). Também, cabe destacar que, com esta escolha, o termo de regularização ($\theta^T P^{-1}\theta$) irá aumentar o custo de valores improváveis de θ no critério dos MQPR, desfavorecendo-os no procedimento de identificação.

Ainda, nesta análise estocástica do procedimento de identificação, pode-se perceber uma diferença interessante entre a identificação de θ pelos métodos de MQP e MQPR. Ao utilizar a metodologia tradicional, de MQP, a interpretação estocástica é que o usuário, na verdade, está maximizando a probabilidade de ocorrer Y , dada uma estrutura de modelo que depende de θ , ou seja:

$$\hat{\theta}_{MQP} = \arg \max_{\theta} f(Y|\theta). \quad (192)$$

Para deixar mais evidente a interpretação acima, um desenvolvimento mais detalhado da mesma é realizado no Apêndice A. Por outro lado, ao utilizar o MQPR foi demonstrado que o usuário maximiza a função $f(\theta|Y)$, a qual contém informações adicionais sobre o vetor de parâmetros θ , além da informação de ocorrer Y dada a estrutura do modelo, representada por $f(Y|\theta)$. Para ilustrar esta diferença, a Figura 10 faz uma comparação entre estas funções densidade, deixando claro qual a estimativa em cada caso.

Outro aspecto a ser destacado é que nesta dissertação supõe-se que o usuário conhece a matriz Σ e, por isso, consegue determinar M diretamente. Porém, se este não for o caso, existem diferentes meios para estimá-la, conforme mostram os trabalhos (GOODWIN; GEVERS; NINNESS, 1992; LJUNG, 1999). Ainda, para estimar os parâmetros por meio do MQPR com a regularização Bayesiana, resta determinar a matriz $P = \Pi$. Assim sendo, destaca-se que a interpretação Bayesiana do processo de identificação também proporciona um meio para estimar Π , que é discutido na próxima subseção do texto.

4.2.2 Estimando os hiperparâmetros

A princípio, sem nenhum conhecimento sobre o vetor real de parâmetros, é difícil definir uma matriz de covariância *a priori* Π . Se for escolhida uma matriz que represente uma covariância elevada, significa que existe uma grande incerteza na informação *a priori* e, assim, a regularização não terá muito efeito na estimativa. Por outro lado, se Π for escolhida de forma a representar uma covariância pequena, então a regularização irá atribuir mais peso ao valor de $\theta = 0$ na identificação, o que pode acabar polarizando a estimativa de forma excessiva, sendo indesejado. Portanto, visando determinar Π na medida certa,

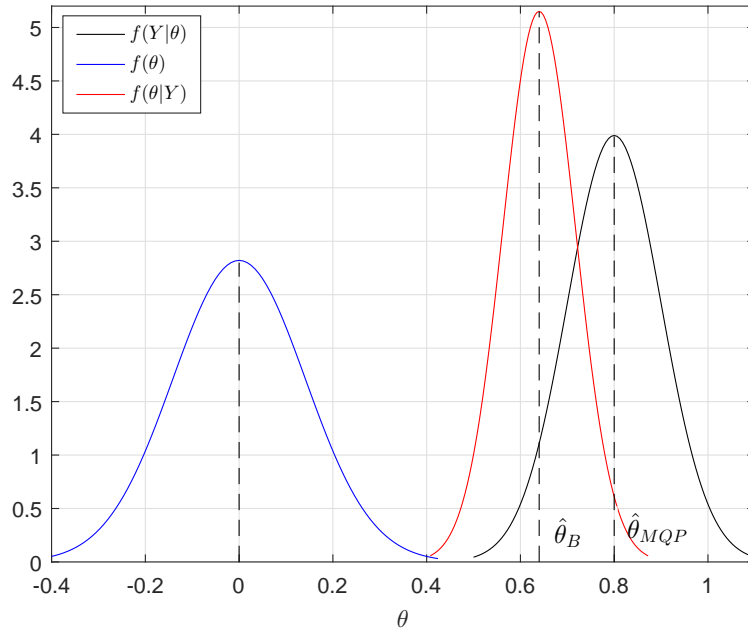


Figura 10: Comparação entre as funções densidade para a interpretação estocástica do procedimento de identificação. Em preto mostra-se $f(Y|\theta)$, em azul a densidade a priori $f(\theta)$ e em vermelho a densidade a posteriori $f(\theta|Y)$.

para que a regularização realmente contribua no processo de identificação, é necessário estimá-la.

Com o propósito de estimar a matriz de covariância a priori, é razoável parametrizá-la por um vetor de *hiperparâmetros*³, denotados por η , e estimá-los a partir dos dados coletados no processo. Para este fim, considere a *distribuição marginal* do vetor de saídas Y . Por (186) se nota que:

$$Y \sim \mathcal{N}(0, \phi \Pi(\eta) \phi^T + \Sigma) \quad (193)$$

A partir desta observação, pode-se formular um problema de *máxima verossimilhança* para estimar η a partir da saída coletada Y (PILLONETTO et al., 2014). Nos problemas de máxima verossimilhança os hiperparâmetros são estimados de forma a maximizar a probabilidade de terem gerado os dados observados Y . Traduzindo matematicamente, isto é expresso por

$$\hat{\eta} = \arg \max_{\eta} f(Y|\eta), \quad (194)$$

com $f(Y|\eta)$ denotando a *função de verossimilhança*, dado que se mede a saída Y . Destaca-se que esta é obtida ao fixar Y na função densidade de probabilidade (como aquela apresentada em (182)), tornando a mesma uma função da variável determinística η , que representa a probabilidade de ocorrer a saída medida.

Para facilitar a solução do problema descrito acima, é comum neste tipo de abordagem calcular o logaritmo natural de $f(Y|\eta)$, o que não muda o máximo da função. Como a

³Na área de estatística Bayesiana, são chamados de hiperparâmetros aqueles que se referem a uma distribuição a priori.

distribuição de Y é Gaussiana, então escreve-se:

$$\hat{\eta} = \arg \max_{\eta} \ln f(Y|\eta) \quad (195)$$

$$\ln f(Y|\eta) = \left[-\frac{1}{2} Y^T \Psi(\eta)^{-1} Y - \frac{1}{2} \ln |\Psi(\eta)| - \frac{Nn}{2} \ln(2\pi) \right], \quad (196)$$

onde a função descrita em (196) é obtida ao se calcular o logaritmo natural da distribuição Gaussiana multivariável (como aquela apresentada em (182)) e $\Psi(\eta) = \phi \Pi(\eta) \phi^T + \Sigma$. Para simplificar o problema, multiplica-se a função (196) por -2 e ignora-se o termo constante. Portanto, resolver o problema de otimização acima é equivalente a resolver (PILLONETTO et al., 2014)

$$\hat{\eta} = \arg \min_{\eta} \left(Y^T \Psi(\eta) Y + \ln |\Psi(\eta)| \right). \quad (197)$$

Essa maximização da *máxima verossimilhança marginal* também é conhecida na literatura pelo nome de *Método Bayesiano Empírico*, ou *Empirical Bayes Method* (PILLONETTO et al., 2014).

Ainda, para resolver o problema de máxima verossimilhança apresentado acima, é importante postular uma maneira de parametrizar a matriz $\Pi(\eta)$ adequadamente, para que a mesma possa representar a matriz de covariância a priori dos parâmetros θ . Tal problema já foi abordado na literatura de identificação com regularização (CHEN; OHLSSON; LJUNG, 2012; PILLONETTO et al., 2014) e diferentes parametrizações, expostas na sequência do texto, foram propostas.

Primeiramente apresenta-se o caso monovariável, por ser mais intuitivo. O desenvolvimento para a extensão multivariável é trivial e será discutido posteriormente. Considere uma resposta ao impulso específica do sistema FIR estudado neste capítulo, como por exemplo da entrada j para a saída i . Lembrando que tal relação é expressa por:

$$y_i(t, \theta_{ij}) = \theta_{ij}^0 u_j(t) + \theta_{ij}^1 u_j(t-1) + \dots + \theta_{ij}^m u_j(t-m) \quad (198)$$

$$y_i(t, \theta_{ij}) = \varphi_{u_j}(t)^T \theta_{ij}. \quad (199)$$

Uma vez que $\Pi(\eta)$ representa a matriz de covariância a priori dos coeficientes da resposta ao impulso, a escolha natural é supor que a mesma reflita o *tamanho* e a *correlação* entre estes coeficientes. Se a resposta ao impulso do sistema é estável, por exemplo, a variância do primeiro parâmetro deve ter um determinado valor, enquanto a variância dos subsequentes deve decair exponencialmente. Com isto, pode-se afirmar que a diagonal de $\Pi(\eta)$ deve decair de forma exponencial. Neste sentido, a escolha mais simples é definir uma matriz diagonal, de forma que seus elementos sejam (CHEN; OHLSSON; LJUNG, 2012):

$$\Pi_{ij}(\eta_{ij}, k, l) = \begin{cases} \alpha_{ij} \beta_{ij}^k, & k = l, \\ 0, & k \neq l, \end{cases} \quad (200)$$

onde o subscrito ij foi usado para indicar que a matriz está relacionada com a resposta ao impulso da entrada j para saída i , k e l são usados para representar o elemento da k -ésima linha e l -ésima coluna da matriz e os hiperparâmetros são definidos como $\eta_{ij} = [\alpha_{ij} \beta_{ij}]$, com $\alpha_{ij} > 0$, $0 < \beta_{ij} < 1$. Aqui, fica claro que α_{ij} corresponde à magnitude da resposta ao impulso, enquanto β_{ij} corresponde ao decaimento exponencial. Este tipo de parametrização é conhecido como *Diagonal* (DI).

Uma forma de parametrização mais completa em relação a anterior consistem em, considerando que a resposta do sistema é suave, levar em conta a correlação positiva entre coeficientes vizinhos da resposta ao impulso. Neste caso, a matriz $\Pi_{ij}(\eta_{ij})$ não deverá ser diagonal e os elementos que se encontram mais próximos de sua diagonal principal deverão conter uma maior correlação. Dessa forma, uma escolha intuitiva é adicionar um termo de correlação $\gamma^{|k-l|}$ entre os coeficientes θ_{ij}^k e θ_{ij}^l . Com isto, se dá origem à parametrização do tipo *Diagonal Correlated* (DC) (CHEN; OHLSSON; LJUNG, 2012):

$$\Pi_{ij}(\eta_{ij}, k, l) = \alpha_{ij} \beta_{ij}^{(k+l)/2} \gamma_{ij}^{|k-l|}, \quad (201)$$

onde $\eta_{ij} = [\alpha_{ij} \ \beta_{ij} \ \gamma_{ij}]$ e $\alpha_{ij} > 0$, $0 < \beta_{ij} < 1$, $|\gamma_{ij}| \leq 1$. Ao adicionar a variável de correlação γ e definir uma matriz cheia, ao invés de diagonal, percebe-se que esta parametrização se torna mais flexível. Em contrapartida, o problema de otimização a ser resolvido se torna mais complexo e mais custoso computacionalmente.

Outro tipo de parametrização, proposto em (CHEN; OHLSSON; LJUNG, 2012), é um caso especial do tipo DC, onde se faz a seguinte atribuição: $\gamma_{ij} = \beta_{ij}^{1/2}$, levando à parametrização conhecida como *Tuned Correlated*, ou (TC) (CHEN; OHLSSON; LJUNG, 2012):

$$\Pi_{ij}(\eta_{ij}, k, l) = \alpha_{ij} \beta_{ij}^{\max(k,l)}, \quad (202)$$

com $\eta_{ij} = [\alpha_{ij} \ \beta_{ij}]$ e $\alpha_{ij} > 0$, $0 < \beta_{ij} < 1$. Ao fixar o parâmetro γ_{ij} este tipo de parametrização tem como principal objetivo facilitar o procedimento de otimização, eliminando uma das variáveis de decisão. Além disto, tal parametrização já havia sido proposta em outro contexto nos trabalhos (PILLONETTO; DE NICOLAO, 2010; PILLONETTO; CHIUSO; DE NICOLAO, 2011), com o nome de *First Order Stable Spline kernel* (CHEN; OHLSSON; LJUNG, 2012).

Por fim, um último tipo de parametrização é explorado nesta dissertação. O mesmo foi desenvolvido nos trabalhos (PILLONETTO; DE NICOLAO, 2010; PILLONETTO; CHIUSO; DE NICOLAO, 2011) no contexto de *Gaussian Process Regression*, fugindo levemente do cenário de identificação paramétrica de sistemas FIR. No entanto, foi testado em (CHEN; OHLSSON; LJUNG, 2012), apresentado bons resultados. Tal parametrização é conhecida como *Stable Spline* (SS), onde a matriz $\Pi_{ij}(\eta_{ij})$ é estruturada como segue:

$$\Pi_{ij}(\eta_{ij}, k, l) = \alpha_{ij} \left(\frac{\beta_{ij}^{k+l+\max(k,l)}}{2} - \frac{\beta_{ij}^{3\max(k,l)}}{6} \right), \quad (203)$$

onde, também, $\eta_{ij} = [\alpha_{ij} \ \beta_{ij}]$ e $\alpha_{ij} > 0$, $0 < \beta_{ij} < 1$.

Até o momento foram descritas as parametrizações para um sistema SISO. Mas, quando o assunto em questão é a regularização para sistemas MIMO, deve-se estender a matriz de covariância a priori, com o intuito de contemplar as outras entradas e saídas. Para isso, considere ainda o caso de um sistema com uma saída i , mas que agora possua n entradas (sistema Multiple-Input Single-Output, ou MISO). Conforme as definições apresentadas no início do capítulo, a relação entrada-saída será dada por

$$y_i(t, \theta_i) = \varphi_{u1}(t)^T \theta_{i1} + \varphi_{u2}(t)^T \theta_{i2} + \dots + \varphi_{un}^T \theta_{in}. \quad (204)$$

Neste caso, é natural assumir que respostas ao impulso relacionadas a diferentes entradas não possuem correlação mútua. Assim, a matriz $\Pi_i(\eta_i)$ pode ser particionada da seguinte

maneira (PILLONETTO et al., 2014):

$$\Pi_i(\eta_i) = \begin{bmatrix} \Pi_{i1}(\eta_{i1}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Pi_{i2}(\eta_{i2}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Pi_{in}(\eta_{in}) \end{bmatrix}, \quad (205)$$

onde $\eta_i = [\eta_{i1}^T, \eta_{i2}^T, \dots, \eta_{in}^T]^T$ e cada $\Pi_i(\eta_i)$ está relacionada somente com a saída i . Cada submatriz $\Pi_{ij}(\eta_{ij})$ possui sua parametrização, conforme os diferentes tipos descritos anteriormente.

De forma análoga, agora pode-se estender o resultado MISO para lidar com o caso completo MIMO, considerando todas as entradas e saídas. Também se faz a suposição que as respostas ao impulso relacionadas a diferentes saídas são descorrelacionadas. Dessa forma, a matriz $\Pi(\eta)$ completa será

$$\Pi(\eta) = \begin{bmatrix} \Pi_1(\eta_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Pi_2(\eta_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Pi_n(\eta_n) \end{bmatrix}, \quad (206)$$

com $\eta = [\eta_1^T, \eta_2^T, \dots, \eta_n^T]^T$ e cada $\Pi_i(\eta_i)$ descrito por (205).

Finalmente, com a estrutura multivariável de $\Pi(\eta)$, com os diferentes tipos de parametrização e com os dados Z^N coletados do processo, pode-se resolver o problema de otimização posto em (197) para *estimar a matriz de regularização* (ou matriz de covariância a priori). É importante destacar que a escolha do tipo de parametrização impacta na complexidade computacional do problema e na flexibilidade de $\Pi(\eta)$. É fato que, ao escolher uma parametrização mais flexível e que descreve de forma mais precisa a matriz $\Pi(\eta)$, como é o caso da parametrização DC, a complexidade e o custo computacional do problema aumentam. Por outro lado, se for escolhida uma parametrização mais simples, como por exemplo a DI, se perde na possível representação de $\Pi(\eta)$, mas o problema de otimização se torna menos complexo. Portanto, é importante que se tenha ideia deste compromisso na hora de escolher o tipo de parametrização.

Outro aspecto a ser enfatizado aqui e investigado de forma mais profunda em (CHEN; LJUNG, 2013) é a própria complexidade do problema de otimização que precisa ser resolvido para estimar os hiperparâmetros. É possível observar que o problema é não convexo e que para resolvê-lo, independente do tipo de *solver* utilizado, a função objetivo deve ser computada várias vezes, para diferentes valores de η . Contudo, calcular esta função para um número de dados N elevado pode resultar em problemas de mal condicionamento e portanto, produzir valores incorretos. À vista disto, no trabalho (CHEN; LJUNG, 2013) diferentes algoritmos são propostos para computar a função custo definida em (197) e otimizar o problema para obter os hiperparâmetros. Também, é importante comentar que estes algoritmos foram introduzidos na *toolbox* de identificação do MATLAB (LJUNG; SINGH; CHEN, 2015) e serão usados posteriormente nesta dissertação.

4.2.3 Propriedades da estimativa por MQPR

Novamente, com o propósito de analisar a qualidade das estimativas, aqui são demonstradas as propriedades do método de identificação com a introdução da ferramenta de regularização. Primeiramente, será desenvolvida a análise para o caso geral de identificação por MQPR, ou seja, sem definir as matrizes M e P .

Em vista disso, considere que o sistema a ser identificado respeita as equações (164) e (165). Para verificar se a estimativa $\hat{\theta}_R$ é ou não polarizada, é preciso calcular seu valor esperado, dado por

$$E[\hat{\theta}_R] = E[(P\phi^T M\phi + I)^{-1} P\phi^T MY] \quad (207)$$

$$= E[(P\phi^T M\phi + I)^{-1} P\phi^T M(\phi\theta_0 + W)] \quad (208)$$

$$= (P\phi^T M\phi + I)^{-1} P\phi^T M\phi\theta_0. \quad (209)$$

Por (209), nota-se que $E[\hat{\theta}_R] \neq \theta_0$, o que mostra que a estimativa regularizada é polarizada. A polarização da estimativa, por sua vez, é dada por

$$Bias_R(P, M) = E[\hat{\theta}_R] - \theta_0 = -(P\phi^T M\phi + I)^{-1} \theta_0. \quad (210)$$

Percebe-se, então, que para a estimativa regularizada, a polarização é linear nos parâmetros ideais θ_0 . Como era de se esperar, este fato também ocorre no caso monovariável, descrito em (CHEN; OHLSSON; LJUNG, 2012; PILLONETTO et al., 2014) e nos problemas estudados em (ELDAR, 2006).

Em relação à covariância das estimativas obtidas pela técnica dos MQPR, tem-se que

$$Cov_R(P, M) = E[(\hat{\theta}_R - E[\hat{\theta}_R])(\hat{\theta}_R - E[\hat{\theta}_R])^T]. \quad (211)$$

Substituindo a equação da estimativa, descrita em (176), e da média de $\hat{\theta}_R$, descrita em (209), na expressão acima, chega-se em

$$Cov_R(P, M) = E\{[(P\phi^T M\phi + I)^{-1} P\phi^T MY - (P\phi^T M\phi + I)^{-1} P\phi^T M\phi\theta_0] \times [(P\phi^T M\phi + I)^{-1} P\phi^T MY - (P\phi^T M\phi + I)^{-1} P\phi^T M\phi\theta_0]^T\}, \quad (212)$$

onde, pode-se usar a relação $Y - \phi\theta_0 = W$, resultando em

$$Cov_R(P, M) = E[(P\phi^T M\phi + I)^{-1} P\phi^T M W W^T M\phi P (\phi^T M\phi P + I)^{-1}], \quad (213)$$

$$= (P\phi^T M\phi + I)^{-1} P\phi^T M \Sigma M\phi P (\phi^T M\phi P + I)^{-1}. \quad (214)$$

Finalmente, a propriedade mais abrangente, a matriz de MSE da estimativa, é calculada ao combinar a polarização e a covariância para este tipo de estimativa:

$$MSE_R(P, M) = (P\phi^T M\phi + I)^{-1} (\theta_0 \theta_0^T + P\phi^T M \Sigma M\phi P) (\phi^T M\phi P + I)^{-1}. \quad (215)$$

Se for considerado o caso de maior interesse nesta dissertação, que é o caso da regularização Bayesiana, então, a partir do desenvolvimento acima, chega-se nas seguintes propriedades:

$$Bias_R(\Pi, \Sigma^{-1}) = -(\Pi\phi^T \Sigma^{-1} \phi + I)^{-1} \theta_0 \quad (216)$$

$$Cov_R(\Pi, \Sigma^{-1}) = (\Pi\phi^T \Sigma^{-1} \phi + I)^{-1} \Pi\phi^T \Sigma^{-1} \phi \Pi (\phi^T \Sigma^{-1} \phi \Pi + I)^{-1} \quad (217)$$

$$MSE_R(\Pi, \Sigma^{-1}) = (\Pi\phi^T \Sigma^{-1} \phi + I)^{-1} (\theta_0 \theta_0^T + \Pi\phi^T \Sigma^{-1} \phi \Pi) (\phi^T \Sigma^{-1} \phi \Pi + I)^{-1} \quad (218)$$

Em uma primeira análise, ao comparar as propriedades dos métodos MQP e MQPR não é possível dizer qual destes possui as melhores propriedades, principalmente, a menor matriz de MSE. Isto ocorre pois, apesar da matriz $M = \Sigma^{-1}$ ser conhecida, as propriedades ainda dependem de Π , a qual é desconhecida e deve ser estimada. Com isto, não se pode afirmar que vale a pena introduzir regularização no processo. Neste cenário, a próxima subseção do texto demonstra que existe uma matriz ótima de regularização, a qual minimiza a MSE em um certo sentido, além de discutir a qualidade das estimativas dos hiperparâmetros, que ratificam a importância e eficiência de se incluir a regularização no problema de identificação de sistemas FIR.

4.2.4 Matriz ótima de regularização Bayesiana

Como foi estudado anteriormente, a estimativa por MQPR com regularização Bayesiana consiste em definir as matrizes $M = \Sigma^{-1}$ e $P = \Pi$. Por um lado, a matriz Σ é conhecida e então não há um grau de liberdade na sua escolha. Contudo, a matriz Π é desconhecida a princípio e deve ser estimada a partir de dados coletados no processo e diferentes parametrizações, conforme discutido na subseção 4.2.2. De outra forma, suponha agora que existe um grau de liberdade na escolha de Π e que a mesma não é estimada. Assim, esta subseção demonstra, por meio do Teorema 4.1, como definir Π de forma a minimizar a matriz de MSE. Um procedimento similar é adotado no caso de sistemas monovariáveis, dado em (CHEN; OHLSSON; LJUNG, 2012).

Teorema 4.1 (Escolha da Matriz Ótima de Regularização). *A matriz de MSE descrita em (218) respeita a seguinte desigualdade matricial:*

$$MSE_R(\Pi, \Sigma^{-1}) \geq MSE_R(\theta_0 \theta_0^T, \Sigma^{-1}), \forall \Pi \geq 0. \quad (219)$$

Prova. Primeiramente, a partir da equação (218), define-se:

$$Q_0 = \theta_0 \theta_0^T \quad \text{e} \quad B = \phi^T \Sigma^{-1} \phi. \quad (220)$$

Assim, reescreve-se o MSE como:

$$MSE_R(\Pi, \Sigma^{-1}) = (\Pi B + I)^{-1} (Q_0 + \Pi B \Pi) (B \Pi + I)^{-1}. \quad (221)$$

Também, para simplificar a notação, as seguintes relações são utilizadas:

$$A = -(\Pi B + I)^{-1} \quad \text{e} \quad A_0 = -(Q_0 B + I)^{-1}. \quad (222)$$

Agora reescrevendo a desigualdade exposta em (219)

$$A(Q_0 + \Pi B \Pi)A^T \geq A_0(Q_0 + Q_0 B Q_0)A_0^T \quad (223)$$

$$A Q_0 A^T + A \Pi B B^{-1} B \Pi A^T \geq A_0 Q_0 A_0^T + A_0 Q_0 B B^{-1} B Q_0 A_0^T. \quad (224)$$

Note também, que

$$A \Pi B = -(I + A) \quad \text{e} \quad A_0 Q_0 B = -(I + A_0) \quad (225)$$

Substituindo (225) em (224), chega-se em:

$$A Q_0 A^T + (I + A) B^{-1} (I + A)^T \geq A_0 Q_0 A_0^T + (I + A_0) B^{-1} (I + A_0)^T \quad (226)$$

$$(A - A_0) Q_0 (A - A_0)^T + (A - A_0) B^{-1} (A - A_0)^T \geq 0 \quad (227)$$

$$(A - A_0) (Q_0 + B^{-1}) (A - A_0)^T \geq 0 \quad (228)$$

Para concluir a prova, é necessário perceber que a matriz $Q_0 + B^{-1}$ é positiva definida. Nota-se que o primeiro termo da soma é uma matriz positiva semi-definida por construção, enquanto a segunda é positiva definida dada a condição de existência do mínimo do algoritmo dos MQPR e a natureza de Σ . Por consequência as relações (228) e (219) são verdadeiras. \square

O Teorema 4.1 demonstra que ao escolher $\Pi = \theta_0\theta_0^T$, se consegue a menor matriz de MSE no contexto de regularização Bayesiana. Por este motivo, a mesma é conhecida como *matriz ótima de regularização Bayesiana*. Além disso, também é importante destacar que a seguinte relação é válida:

$$MSE_M(M) \geq MSE_M(\Sigma^{-1}) \geq MSE_R(\theta_0\theta_0^T, \Sigma^{-1}), \quad (229)$$

ou seja, a MSE ótima de regularização Bayesiana é menor, inclusive, que as matrizes de MSE para o caso geral do método MQP. Este fato pode ser verificado pois o método de MQP é um caso particular do MQPR, onde (usando um abuso de notação) $P = \Pi \rightarrow \infty$.

A partir das observações acima, conclui-se que vale a pena adicionar a regularização Bayesiana no processo de identificação de sistemas FIR quando se escolhe $\Pi = \theta_0\theta_0^T$, visto que as estimativas apresentam melhor qualidade, i.e., menor MSE. Porém, um fato negativo que pode ser verificado é que a matriz ótima de regularização depende dos parâmetros do sistema, que são desconhecidos, sendo impossível implementá-la nas aplicações de identificação.

Assim sendo, é necessário discutir se é válido adicionar regularização ao problema, quando a matriz Π é estimada pela abordagem da máxima verossimilhança, conforme exibido na Subseção 4.2.2. Neste sentido, observa-se que na literatura, os trabalhos (CHEN; OHLSSON; LJUNG, 2012; PILLONETTO et al., 2014; PRANDO; CHIUSO; PILLONETTO, 2017) concluem, através de uma série de exemplos numéricos, que o uso de regularização Bayesiana no procedimento de identificação o torna mais preciso e robusto, se comparado à abordagem tradicional (por minimização do erro de predição). Além disso, o trabalho (PILLONETTO; CHIUSO, 2015) demonstra a robustez e efetividade da estimativa dos hiperparâmetros, mostrando que é vantajoso adicionar regularização ao procedimento de identificação.

Por fim, na sequência exhibe-se um exemplo numérico que tem como principal objetivo demonstrar o efeito que a regularização causa na função custo do procedimento de identificação. A partir deste exemplo, fica mais fácil compreender as propriedades da identificação com regularização.

4.2.5 Exemplo ilustrativo

Apesar desta dissertação ter como foco principal o desenvolvimento e análise para sistemas multivariáveis, para demonstrar os efeitos que a regularização causa na função custo, considere que se deseja identificar um sistema monovariável. Isto não acarreta em perda de generalidade para o caso multivariável, pois o efeito da regularização será análogo, mas simplifica o desenvolvimento do exemplo. Seja o sistema:

$$y(t) = \theta_1 u(t-1) + \theta_2 u(t-2) + w(t), \quad (230)$$

com $\theta_1 = 0,9$, $\theta_2 = 0,8$ e $E[w(t)w(t)] = 0,1$. Para o cálculo da função custo $J_{MQP}(\theta)$, a matriz de ponderação foi definida como $M = 1/0,1 = 10$, conforme discutido ao longo do texto, e a entrada $u(t)$ foi definida como um sinal de ruído branco de variância unitária, i.e. $E[u(t)u(t)] = 1$, com tamanho $N = 100$. O sistema foi simulado em malha aberta com uma determinada realização do ruído.

A Figura 11 demonstra as curvas de nível da função $J_{MQP}(\theta)$ para este determinado exemplo. O mínimo é denotado pelo símbolo ‘*’ em vermelho. Nota-se que, como existe o ruído no sistema, o mínimo da função não é exatamente o valor ideal $\theta_0 = [0,9 \ 0,8]^T$, mas um valor bem próximo.

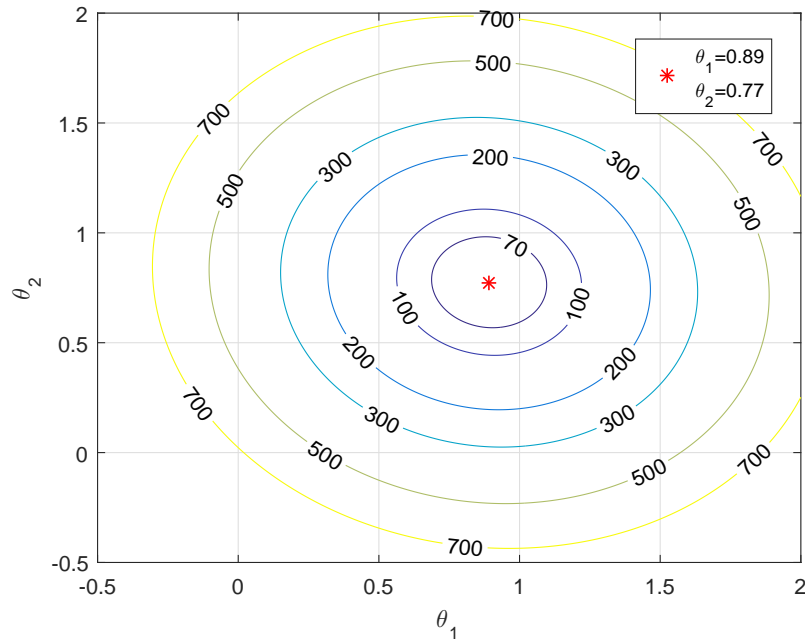


Figura 11: Função custo $J_{MQP}(\theta)$ para o exemplo numérico.

Considere, agora, o caso em que se adiciona regularização no problema. Define-se, de forma arbitrária e para fins de comparação, a seguinte matriz de regularização:

$$P = \begin{bmatrix} 0,01 & 0 \\ 0 & 0,01 \end{bmatrix}. \quad (231)$$

Então, para o mesmo sistema simulado anteriormente, calcula-se a função custo do termo de regularização e a função custo regularizada $J_{MQP}^R(\theta)$. As curvas de nível para a primeira são exibidas em 12-(a), enquanto as curvas de nível para a função custo regularizada são exibidas em 12-(b). Novamente, o símbolo ‘*’ em vermelho denota o mínimo de cada função.

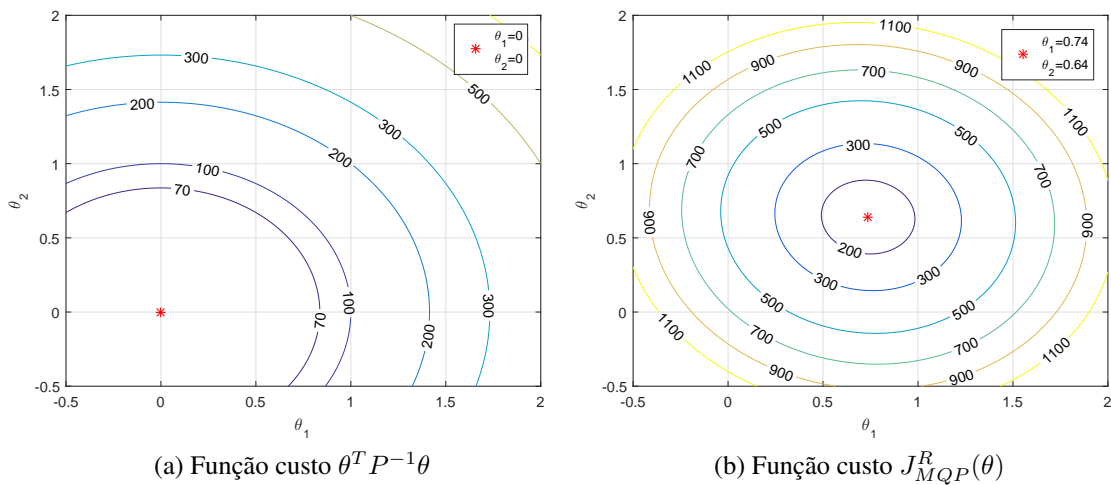


Figura 12: Funções custo regularizadas para o exemplo numérico.

Ao analisar as Figuras, percebe-se que o mínimo do termo de regularização ocorre

em $\theta = [0 \ 0]^T$, fato que já foi constatado anteriormente na dissertação e é fácil de perceber. Além disso, o mais importante é analisar a função custo dos dois termos combinados: $J_{MQP}^R(\theta)$. Pela figura, percebe-se que o valor mínimo desta função ocorre quando $\theta = [0,74 \ 0,64]^T$. Em relação à função custo original, este mínimo foi atraído para mais próximo da origem (ficando um pouco mais distante do valor ideal), o que é coerente pois a função combinada é uma ponderação entre a função custo original e o termo de regularização. Este efeito, no final das contas, é o que irá causar a polarização das estimativas.

Outro aspecto relevante a ser analisado são os valores que a função custo assume ao redor do ponto de mínimo. Comparando as figuras demonstradas no exemplo, conclui-se que a função custo regularizada cresce de forma mais rápida ao redor do ponto de mínimo, se comparada à função custo tradicional. No fim, é esta característica que irá resultar na menor covariância nas estimativas do método MQPR.

Um último fator a ser observado neste exemplo é em relação ao efeito da escolha da matriz P na função objetivo. Por simplicidade, neste exemplo a matriz P foi escolhida como uma matriz diagonal, e com ambos os autovalores iguais a 0,01. Isto acabou gerando uma função $\theta^T P^{-1} \theta$ na qual as curvas de nível possuem um formato de círculo. Destaca-se que se forem escolhidas (ou estimadas) matrizes com autovalores diferentes, então as curvas de nível passarão a ter um formato de elipse. Ainda mais, se a matriz for cheia, então os eixos destas elipses não serão mais alinhadas com os eixos θ_1, θ_2 .

4.3 Considerações finais

Este capítulo foi responsável por apresentar ao leitor os conceitos fundamentais do uso de regularização nos procedimentos de identificação de sistemas, visando a aplicação desta ferramenta no método VRFT.

O capítulo começou apresentando o estado da arte de identificação de sistemas pela metodologia tradicional, onde foram enfatizadas as aplicações e as estruturas de modelos FIR. Na sequência, foi exibida a metodologia para identificação deste tipo de sistema pelo conhecido método dos MQP, onde também foram exibidas suas propriedades. Neste sentido, foi apresentada a matriz de MSE, critério fundamental para a análise, uma vez que é composto por uma parcela relativa a polarização e uma parcela relativa a covariância das estimativas.

Na Seção 4.2 foi exposto o método MQPR. Este, por sua vez, é pouco desenvolvido na literatura, visto que o caso de sistemas multivariáveis está só começando a ser estudado neste contexto. Portanto, as propriedades e a análise mais aprofundada do método são contribuições desta dissertação. Neste sentido, o primeiro aspecto introduzido foi a função custo regularizada ($J_{MQP}^R(\theta)$), onde foi adicionado o termo de regularização $\theta^T P^{-1} \theta$ no critério tradicional. Em seguida, a perspectiva Bayesiana do processo de identificação foi discutida, resultando na principal diretriz de como escolher as matrizes de ponderação M e de regularização P no método MQPR. Como foi destacado, por este motivo a regularização aqui adotada é conhecida como regularização Bayesiana.

Diante disto, procurando obter estimativas com boas propriedades, mostrou-se que a matriz de regularização $P = \Pi$ deve ser estimada a partir dos dados coletados no processo. Assim sendo, a Subseção 4.2.2 lidou com este assunto. Primeiramente, foi apresentado o problema de otimização que deve ser resolvido para estimar tal matriz, o qual é baseado em um problema de máxima verossimilhança. Em seguida, diferentes formas de parametrização da matriz Π , introduzidas na literatura, foram expostas, onde foi destacado o compromisso que existe entre a flexibilidade e a complexidade computacional

da escolha de cada tipo de parametrização.

Já em 4.2.3 foram desenvolvidas as propriedades do método MQPR. Inicialmente se tratou o caso mais genérico, e, em seguida, o caso de regularização Bayesiana foi abordado. A partir das propriedades obtidas, em 4.2.4 demonstrou-se, por meio do Teorema 4.1, que existe uma matriz de regularização que produz a menor MSE possível em um determinado sentido.

Finalmente, um exemplo numérico, mostrando o efeito que a regularização causa na função custo foi desenvolvido. No exemplo, também foi feita uma breve discussão sobre o efeito da matriz de regularização na função custo e um paralelo entre o efeito observado e as propriedades desenvolvidas na subseção anterior do texto.

5 VIRTUAL REFERENCE FEEDBACK TUNING COM REGULARIZAÇÃO BAYESIANA

Este capítulo da dissertação apresenta a extensão com regularização para as formulações SISO e MIMO do método VRFT. Neste sentido, a primeira ideia de incluir regularização no VRFT, visando aprimorar as propriedades de suas estimativas, foi proposta para o controle de processos SISO em (FORMENTIN; KARIMI, 2014) e expandida em (RALLO et al., 2016). Ambas estas metodologias foram baseadas no novo paradigma de identificação de sistemas com regularização, estudado no Capítulo 4 desta dissertação. Neste capítulo, estas extensões serão discutidas e aquela apresentada em (RALLO et al., 2016) será estendida para aplicação em processos multivariáveis. Contudo, antes de introduzir estas novas extensões para o VRFT é interessante lembrar alguns conceitos e propriedades das formulações tradicionais da técnica, já discutidas neste trabalho e que auxiliam a exposição das principais motivações de utilizar a ferramenta de regularização.

É importante lembrar que o VRFT busca sintonizar parâmetros do controlador (neste trabalho são considerados controladores lineares nos parâmetros) para o processo (SISO ou MIMO) descrito em (1), usando somente os dados coletados Z^N , sem a necessidade de uma etapa de modelagem e/ou identificação. A sintonia é baseada na minimização do critério de seguimento de modelo de referência, onde se faz a reinterpretação deste problema usando o conceito de malha virtual, explicado com mais detalhes na Seção 3.1 do texto e demonstrado na Figura 2. Nesta reinterpretação do problema, os parâmetros do controlador são identificados por meio da minimização do critério¹:

$$\hat{\rho}_{VRM} = \arg \min_{\rho} J_{VR}^{MIMO}(\rho) \quad (232)$$

$$J_{VR}^{MIMO}(\rho) = \bar{E} [\|F(q)[u(t) - C(q,\rho)\bar{e}(t)]\|_2^2], \quad (233)$$

onde $F(q)$ é o filtro usado para aproximar $J_y(\rho)$ e $J_{VR}^{MIMO}(\rho)$, $u(t) \in \mathbb{R}^n$ são os dados de entrada coletados no experimento, $C(q,\rho)$ o controlador que se deseja identificar e $\bar{e}(t) \in \mathbb{R}^n$ o sinal de erro virtual, que por sua vez é calculado por

$$\bar{e}(t) = [T_d(q)^{-1} - I]y(t). \quad (234)$$

O símbolo $T_d(q)$ denota o modelo de referência que se pretende seguir e $y(t) \in \mathbb{R}^n$ são as saídas obtidas no experimento de coleta de dados.

Foi demonstrado no Capítulo 3 que a solução do problema de otimização descrito acima pode ser encontrada a partir do método dos mínimos quadrados e, com isto, chega-

¹Aqui já se considera diretamente o caso MIMO, uma vez que o caso SISO pode ser visto como um caso particular, onde a quantidade de entradas e saídas do sistema é $n = 1$.

se na seguinte expressão para os parâmetros:

$$\hat{\rho}_{VRM} = \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi_F(t) \varphi_F(t)^T \right]^{-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi_F(t) u_F(t) \right], \quad (235)$$

com $u_F(t) = F(q)u(t) \in \mathbb{R}^n$ sendo o sinal de entrada filtrado e $\varphi_F(t) = \varphi(t)F(q)^T \in \mathbb{R}^{p \times n}$ sendo o vetor regressor do VRFT filtrado. Vale destacar que o vetor regressor do VRFT ($\varphi(t)$) é montado como nas equações (75) e (76), a partir do sinal de erro virtual e da estrutura do controlador que será usada no processo.

Ainda, foi estudado no Capítulo 3 que quando a Premissa 2.1 é satisfeita, então minimizar o critério $J_{VR}^{MIMO}(\rho)$ do VRFT é equivalente a minimizar $J_y(\rho)$. Já quando tal premissa é violada, deve-se utilizar o grau de liberdade fornecido pelo filtro $F(q)$ para aproximar o mínimo de ambas as funções.

Na Seção 3.3 foi explorada a situação em que o ruído do processo é significativo, principal cenário estudado nesta dissertação. Foi discutido que, neste caso, ao calcular $\hat{\rho}_{VRM}$ o usuário obtém uma estimativa para o vetor de parâmetros ideais ρ_0 . Neste contexto, é importante calcular as propriedades *assintóticas* da estimativa de ρ_0 , para entender quais as consequências desta estimativa na malha fechada do processo. Assim sendo, durante a análise das propriedades, foi verificado que o ruído de saída do processo acaba se propagando para o sinal de erro virtual do VRFT, ou seja:

$$\bar{e}(t) = \underbrace{(T_d(q)^{-1} - I)G_0(q)u(t)}_{\bar{e}_0(t)} + \underbrace{(T_d(q)^{-1} - I)H_0(q)w(t)}_{\tilde{e}(t)} \quad (236)$$

$$\bar{e}(t) = \bar{e}_0(t) + \tilde{e}(t). \quad (237)$$

Ainda, verificou-se que a parcela do erro virtual que surge devido à presença do ruído, simbolizada por $\tilde{e}(t)$, não excita o controlador ideal. Também, dentro desta análise das propriedades, foi exposta uma forma de escrever a relação entrada e saída do controlador ideal a partir do sinal de erro virtual disponível, que é contaminado com o ruído $\tilde{e}(t)$:

$$u(t) = \varphi_0(t)^T \rho_0 \quad (238)$$

$$u(t) = \varphi(t)^T \rho_0 - \tilde{\varphi}(t)^T \rho_0 \quad (239)$$

$$u(t) = \varphi(t)^T \rho_0 + d(t), \quad (240)$$

onde $\varphi(t) = \varphi_0(t) + \tilde{\varphi}(t)$. Cabe salientar que $\varphi_0(t)$ é o vetor regressor montado como em (75) e (76) com o sinal de erro virtual livre de ruído, simbolizado por $\bar{e}_0(t)$, e $\tilde{\varphi}(t)$ é o vetor regressor montado com o sinal $\tilde{e}(t)$.

Enfim, a partir destas características do ruído e da forma de escrever o sinal $u(t)$, foram analisadas as propriedades assintóticas da estimativa com o algoritmo dos mínimos quadrados para o caso em que a Premissa 2.1 é respeitada. Constatou-se que a diferença assintótica entre a estimativa e os parâmetros ideais é dada por

$$\hat{\rho}_{VRM} - \rho_0 = [(R_{\varphi_{0F}} + R_{\tilde{\varphi}_F})^{-1} R_{\varphi_{0F}} - I] \rho_0, \quad (241)$$

onde foi definido que $R_{\varphi_{0F}} = \bar{E} \varphi_{0F}(t) \varphi_{0F}(t)^T$ e $R_{\tilde{\varphi}_F} = \bar{E} \tilde{\varphi}_F(t) \tilde{\varphi}_F(t)^T$. Dessa forma, a equação (241) expõe que a estimativa é polarizada quando $N \rightarrow \infty$, ou seja, que a estimativa é não consistente. Conforme foi enfatizado anteriormente, tal propriedade é inconveniente e acaba degradando o desempenho dos sistemas de controle em malha fechada resultantes desta metodologia, fato que foi verificado de forma mais concreta por meio do exemplo motivacional da Subseção 3.3.2.

Portanto, visando eliminar este problema indesejado da polarização, a Subseção 3.3.1 do texto introduziu a estimativa do VRFT com variáveis instrumentais. Foi demonstrado que a variável instrumental é uma matriz $\zeta(t) \in \mathbb{R}^{p \times n}$ que deve satisfazer as equações:

$$\bar{E}\zeta(t)\varphi(t)^T > 0 \quad (242)$$

$$\bar{E}\zeta(t)d(t) = 0, \quad (243)$$

e foram discutidas as duas principais abordagens para se obter a variável instrumental no cenário do VRFT. Vale lembrar que estas abordagens são baseadas em dados de um segundo experimento ou em dados obtidos ao simular um modelo identificado do processo, os quais são utilizados para montar a variável instrumental $\zeta(t)$ como nas equações (120) e (119). Assim, após a escolha da variável instrumental, apresentou-se a estimativa dos parâmetros por meio desta metodologia, a qual pode ser encontrada por meio da solução da seguinte equação de correlação:

$$\hat{\rho}_{VI} = \text{Sol} \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \zeta_F(t)(u_F(t) - \varphi_F(t)^T \rho) = 0 \right], \quad (244)$$

onde $\zeta_F(t)$ é a variável instrumental, $u_F(t)$ o sinal de entrada do sistema obtido no experimento e $\varphi_F(t)$ o vetor regressor do VRFT, todos filtrados por $F(q)$. O símbolo “Sol” denota a solução da equação de correlação, que é obtida ao se isolar a variável ρ em (244):

$$\hat{\rho}_{VI} = \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \zeta_F(t)\varphi_F(t)^T \right]^{-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \zeta_F(t)u_F(t) \right]. \quad (245)$$

Após a introdução da estimativa do VRFT com variáveis instrumentais, suas propriedades assintóticas também foram analisadas e discutidas. Inicialmente, demonstrou-se que o valor assintótico de $\hat{\rho}_{VI}$ é

$$\hat{\rho}_{VI} = \rho_0, \quad (246)$$

o que evidencia que esta estimativa é não polarizada quando $N \rightarrow \infty$, ou seja, que a mesma é consistente. Porém, também foi destacado na Subseção 3.3.1 que, apesar de produzir uma estimativa consistente, esta abordagem possui sua própria desvantagem: a alta covariância de $\hat{\rho}_{VI}$. Neste sentido, com base na bibliografia (SÖDERSTRÖM, 2018), foi apresentada a matriz de covariância de $\hat{\rho}_{VI}$, a qual consistem em:

$$\text{Cov}_{VI} = E[(\hat{\rho}_{VI} - E[\hat{\rho}_{VI}])(\hat{\rho}_{VI} - E[\hat{\rho}_{VI}])^T] \approx \frac{\Lambda_{VI}}{N}, \quad (247)$$

com

$$\Lambda_{VI} = R_{\varphi_{0F}}^{-1} \mathbf{R}_{VI} R_{\varphi_{0F}}^{-T}, \quad (248)$$

e onde

$$\mathbf{R}_{VI} = E \left[\left(\sum_{i=0}^{\infty} \zeta_F(t+i)K_i \right) \sigma_w \left(\sum_{j=0}^{\infty} K_j^T \zeta_F(t+j)^T \right) \right] \quad (249)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} K_i q^i = F(q)C_d(q)[T_d(q)^{-1} - I]H_0(q). \quad (250)$$

Vale relembrar que a matriz σ_w foi definida no Capítulo 2 como a covariância do ruído do processo, isto é, $E[w(t)w(t)^T] = \sigma_w^2$ e $H_0(q)$ é a matriz de transferência do ruído do processo.

Ainda, mostrou-se, por meio do exemplo motivacional da Subseção 3.3.2, que esta elevada covariância das estimativas também acaba por prejudicar de forma substancial o comportamento dos sistemas resultantes em malha fechada.

Enfim, agora que os conceitos do VRFT foram revisados e as desvantagens das metodologias tradicionais por MQ ou VI foram explicitadas novamente, as próximas seções do texto apresentam as metodologias do VRFT regularizado, que buscam aprimorar as propriedades das estimativas de ρ_0 , na esperança que isto se traduza em melhores desempenhos para os sistemas em malha fechada resultantes.

Assim sendo, a Seção 5.1 demonstra a extensão da formulação tradicional do VRFT com MQ ao se adicionar a regularização. Já a Seção 5.2 demonstra a inclusão de regularização no VRFT com variáveis instrumentais. Ainda, a Seção 5.3 discute como escolher e estimar as matrizes de ponderação e regularização, etapa que é fundamental nas técnicas propostas. Por fim, na Seção 5.4 são exibidos alguns exemplos numéricos, que demonstram as principais características e propriedades de cada técnica.

5.1 Adicionando regularização no VRFT com mínimos quadrados

Como mencionado anteriormente, o grande foco desta dissertação é estender o VRFT ao adicionar a ferramenta de regularização, visando aprimorar suas propriedades estatísticas quando existe uma presença significativa de ruído no processo. Assim sendo, a extensão mais natural, baseada no paradigma de identificação com regularização que foi discutido no Capítulo 4 desta dissertação, é incluir o termo de regularização na formulação do VRFT com mínimos quadrados.

Dessa forma, são mantidas as principais características do VRFT MIMO. O método ainda busca a identificação do controlador ideal baseado nos dados coletados do processo e na interpretação da malha virtual. Porém, agora se adiciona um termo de regularização \mathcal{L}_2 na função custo do VRFT, ou seja, calcula-se uma nova estimativa a partir da otimização do seguinte critério:

$$\hat{\rho}_{VRM}^{reg} = \arg \min_{\rho} J_{VREG}^{MIMO}(\rho) \quad (251)$$

$$J_{VREG}^{MIMO}(\rho) = \bar{E} [\|F(q)[u(t) - C(q,\rho)\bar{e}(t)]\|_{M_{VR}}^2] + \rho^T P_{VR}^{-1} \rho, \quad (252)$$

onde foi incluído o termo de regularização $\rho^T P_{VR}^{-1} \rho$ e utilizada a matriz de ponderação $M_{VR} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (simétrica positiva definida), em comparação com a formulação original do VRFT MIMO. Cabe destacar que $P_{VR} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ é a matriz simétrica positiva definida de regularização e que $\|\cdot\|_M^2$ denota a norma $x^T M x$ do vetor x .

Perceba que o objetivo de introduzir a regularização \mathcal{L}_2 e a matriz de ponderação M_{VR} no critério do VRFT é formular o problema de identificação do controlador ideal de uma maneira análoga ao problema de identificação de modelos FIR com o método dos MQPR, conforme apresentado na Seção 4.2 desta dissertação e imaginando que com esta escolha, as propriedades da técnica sejam aprimoradas. Então, a próxima seção do texto demonstra como calcular a estimativa dos parâmetros ρ_0 a partir do problema de otimização descrito nas equações (251) e (252).

5.1.1 Estimativa do VRFT com MQPR

A estimativa dos parâmetros do controlador ideal por meio do VRFT com MQPR é obtida ao solucionar o problema descrito nas equações (251) e (252). Note que tal problema é convexo e possui uma solução analítica, a qual pode ser alcançada de forma trivial: calculando o vetor gradiente da função custo com relação aos parâmetros ρ e igualando o mesmo a zero. Ainda, antes de efetuar este cálculo, é importante lembrar que nesta dissertação os controladores considerados são lineares nos parâmetros e, portanto, para um número de dados N finito, a função custo pode ser calculada como

$$J_{VREG}^{MIMO}(\rho) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [\|u_F(t) - \varphi_F(t)^T \rho\|_{M_{VR}}^2] + \rho^T P_{VR}^{-1} \rho, \quad (253)$$

Agora, calculando o gradiente da função exibida acima e igualando-o a zero, chega-se na seguinte expressão

$$\frac{\partial(J_{VREG}^{MIMO}(\rho))}{\partial \rho} = \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N \varphi_F(t) M_{VR} \varphi_F(t)^T \rho - \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N \varphi_F(t) M_{VR} u_F(t) + 2P_{VR}^{-1} \rho = 0. \quad (254)$$

Multiplicando ambos os lados da equação por $P_{VR}/2$ e isolando a variável ρ , chega-se na seguinte estimativa:

$$\hat{\rho}_{VRM}^{reg} = \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N P_{VR} \varphi_F(t) M_{VR} \varphi_F(t)^T + I \right]^{-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N P_{VR} \varphi_F(t) M_{VR} u_F(t) \right]. \quad (255)$$

Finalmente, a equação (255) representa a estimativa dos parâmetros do controlador ideal por meio do VRFT MIMO com o algoritmo dos mínimos quadrados ponderados regularizados, ou MQPR.

Contudo, apesar de ser a extensão mais natural do VRFT ao incluir regularização, esta formulação não é abordada nos trabalhos (FORMENTIN; KARIMI, 2014; RALLO et al., 2016). Os autores não abordam esta formulação pois, conforme foi estudado e discutido no Capítulo 4, a ferramenta de regularização é interessante para reduzir a covariância das estimativas, adicionando uma pequena polarização. No entanto, a formulação tradicional do VRFT por MQ já apresenta o erro de polarização ao lidar com processos ruidosos e, além disso, não apresenta grandes problemas em relação à covariância das estimativas. Assim, introduzir regularização no VRFT com mínimos quadrados parece, a princípio, não apresentar grandes vantagens. Este fato será brevemente discutido na sequência, através da análise de polarização para esta formulação, e também será verificado por meio dos exemplos numéricos que encerram este capítulo.

5.1.2 Polarização na estimativa do VRFT com MQPR

Assim como na Seção 3.3, aqui são analisadas as propriedades de polarização e/ou consistência da estimativa proposta na equação (255) para o VRFT MIMO. Novamente, as propriedades são consideradas para o caso em que a Premissa 2.1 é satisfeita e supõe-se o cenário assintótico, ou seja, quando $N \rightarrow \infty$, visto que isto simplifica a análise (LJUNG, 1999). Como também se comentou na Seção 3.3, para um número de dados N finito, estas propriedades são aproximadas.

Suponha que a estimativa $\hat{\rho}_{VRM}^{reg}$ é calculada para $N \rightarrow \infty$. Neste cenário, tem-se que

$$\hat{\rho}_{VRM}^{reg} = [P_{VR} \bar{E} \varphi_F(t) M_{VR} \varphi_F(t)^T + I]^{-1} [P_{VR} \bar{E} \varphi_F(t) M_{VR} u_F(t)]. \quad (256)$$

Agora, note que o termo $\bar{E} \varphi_F(t) M_{VR} \varphi_F(t)^T$ pode ser simplificado com um procedimento análogo ao que foi desenvolvido na Seção 3.3, nas equações (104), (105) e (106). Ao realizar tal procedimento para o termo aqui discutido, pode-se concluir que

$$\bar{E} \varphi_F(t) M_{VR} \varphi_F(t)^T = R_{\varphi_{0MF}} + R_{\tilde{\varphi}_{MF}}, \quad (257)$$

onde $\bar{E} \varphi_{0F}(t) M_{VR} \varphi_{0F}(t)^T = R_{\varphi_{0MF}}$ e $\bar{E} \tilde{\varphi}_F(t) M_{VR} \tilde{\varphi}_F(t)^T = R_{\tilde{\varphi}_{MF}}$. Também, ao utilizar a relação $u_F(t) = \varphi_{0F}(t)^T \rho_0$, pode-se reescrever o termo $\bar{E} \varphi_F(t) M_{VR} u_F(t)$ como

$$\bar{E} \varphi_F(t) M_{VR} u_F(t) = \bar{E} \varphi_F(t) M_{VR} \varphi_{0F}(t)^T \rho_0 \quad (258)$$

$$= R_{\varphi_{0MF}} \rho_0. \quad (259)$$

Dessa forma, substituindo os termos expostos em (257) e (259) na expressão da estimativa assintótica, obtém-se

$$\hat{\rho}_{VRM}^{reg} = (P_{VR} R_{\varphi_{0MF}} + P_{VR} R_{\tilde{\varphi}_{MF}})^{-1} P_{VR} R_{\varphi_{0MF}} \rho_0. \quad (260)$$

Ainda, note que esta expressão é equivalente a:

$$\hat{\rho}_{VRM}^{reg} = (R_{\varphi_{0MF}} + R_{\tilde{\varphi}_{MF}} + P_{VR}^{-1})^{-1} R_{\varphi_{0MF}} \rho_0. \quad (261)$$

Por fim, então, calcula-se a diferença assintótica entre o parâmetro ideal e o parâmetro estimado pela metodologia proposta, o que resulta em

$$\hat{\rho}_{VRM}^{reg} - \rho_0 = \left[(R_{\varphi_{0MF}} + R_{\tilde{\varphi}_{MF}} + P_{VR}^{-1})^{-1} R_{\varphi_{0MF}} - I \right] \rho_0. \quad (262)$$

Ao analisar a equação (262), percebe-se que, devido à adição de regularização na estimativa, a mesma será não consistente, ou polarizada para $N \rightarrow \infty$, mesmo no caso em que o ruído do processo é pouco significativo. Isto contrasta com a estimativa tradicional do VRFT por mínimos quadrados, onde era possível considerar que $\hat{\rho}_{VRM}$ era praticamente consistente neste cenário.

A sequência do texto demonstra a adição de regularização na formulação do VRFT MIMO com variáveis instrumentais, estendendo o que foi proposto inicialmente nos trabalhos (FORMENTIN; KARIMI, 2014; RALLO et al., 2016).

5.2 Adicionando regularização no VRFT com variáveis instrumentais

A principal formulação explorada em (FORMENTIN; KARIMI, 2014; RALLO et al., 2016) é, de fato, adicionar regularização na metodologia do VRFT SISO com variáveis instrumentais, uma vez que esta metodologia sofre com o problema de alta covariância e a ferramenta de regularização mostrou-se eficiente para resolver problemas deste tipo no contexto de identificação de sistemas FIR.

Assim, para regularizar o método VRFT MIMO com variáveis instrumentais, propõe-se, nesta dissertação, a estimativa baseada na solução da seguinte equação de correlação:

$$\hat{\rho}_{VI}^{reg} = \text{Sol} \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \zeta_F(t) M_{VR} (u_F(t) - \varphi_F(t)^T \rho) = P_{VR}^{-1} \rho \right], \quad (263)$$

onde, em comparação com a formulação original por VI (conforme pode-se verificar na equação (244)), foi adicionada a matriz simétrica positiva definida de ponderação $M_{VR} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e o termo $P_{VR}^{-1}\rho$ no lado direito da igualdade, com $P_{VR} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ sendo a matriz simétrica positiva definida de regularização. Na sequência, é exibida a solução do problema descrito na equação (263).

5.2.1 Estimativa do VRFT com VI regularizada

É fácil perceber que para obter a solução da equação de correlação definida em (263), basta isolar a variável ρ . Para tanto, o primeiro passo é expandir tal equação no seguinte formato:

$$\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \zeta_F(t) M_{VR} u_F(t) - \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \zeta_F(t) M_{VR} \varphi_F(t)^T \rho = P_{VR}^{-1} \rho. \quad (264)$$

Em seguida, faz-se uma pequena manipulação na expressão e realiza-se a multiplicação de ambos os lados da equação pela matriz de regularização P_{VR} , resultando em

$$\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N P_{VR} \zeta_F(t) M_{VR} u_F(t) = \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N P_{VR} \zeta_F(t) M_{VR} \varphi_F(t)^T + I \right] \rho. \quad (265)$$

Por fim, isolando a variável ρ na equação acima, chega-se na estimativa de ρ_0 pelo método do VRFT com VI regularizada, análogo ao que foi proposto em (FORMENTIN; KARIMI, 2014; RALLO et al., 2016) para o controle de processos SISO:

$$\hat{\rho}_{VI}^{reg} = \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N P_{VR} \zeta_F(t) M_{VR} \varphi_F(t)^T + I \right]^{-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N P_{VR} \zeta_F(t) M_{VR} u_F(t) \right]. \quad (266)$$

Perceba que a estimativa proposta em (266) é muito semelhante àquela proposta pelo VRFT MIMO com MQPR, exibida em (255), onde a grande diferença é a introdução da variável instrumental $\zeta_F(t)$. Perceba, também, que o método do VRFT com mínimos quadrados regularizado é um caso particular da variável instrumental regularizada, onde $\zeta_F(t) = \varphi_F(t)$. É interessante perceber que este fato também acontece em relação às metodologias tradicionais (não regularizadas) de mínimos quadrados e da variável instrumental. Então, pode-se dizer que a estimativa de VI regularizada é uma extensão natural da estimativa com MQPR.

Enfim, ao introduzir este tipo de estimativa, espera-se que a covariância das mesmas seja reduzida, mas que uma *pequena* polarização seja adicionada. Conforme mencionado anteriormente, este também era o objetivo dos trabalhos (FORMENTIN; KARIMI, 2014; RALLO et al., 2016). Dessa forma, ao reduzir a covariância e adicionar uma pequena polarização, os autores do VRFT SISO regularizado tinham como principal intenção reduzir a matriz de MSE das estimativas de ρ_0 e, conseqüentemente, melhorar o desempenho dos sistemas resultantes em malha fechada. Porém, cabe destacar que, de fato, não existe uma relação direta entre a matriz de MSE e o desempenho dos sistemas em malha fechada (ou o custo $J_y(\rho)$). Contudo, uma vez que a matriz de MSE é a principal medida de qualidade das estimativas, pode-se afirmar que ao “reduzir” a MSE, as estimativas apresentam melhor qualidade. Então, ao melhorar a qualidade das estimativas, existe uma tendência a melhorar, também, as propriedades dos sistemas em malha fechada.

5.2.2 Propriedades do VRFT com VI regularizada

Nesta seção são expostas as principais propriedades do estimador proposto para a metodologia do VRFT MIMO com VI regularizada, mostrando que a mesma apresenta polarização e exibindo a sua matriz de covariância e sua MSE. Novamente, as propriedades são desenvolvidas para o caso assintótico ($N \rightarrow \infty$) e considerando que a Premissa 2.1 é satisfeita, ou seja, que o controlador ideal $C_d(q)$ pertence à classe \mathcal{C} , assim como foi realizado para as propriedades dos métodos anteriores.

Considere a estimativa $\hat{\rho}_{VI}^{reg}$ no caso assintótico:

$$\hat{\rho}_{VI}^{reg} = [P_{VR}\bar{E}\zeta_F(t)M_{VR}\varphi_F(t)^T + I]^{-1} [P_{VR}\bar{E}\zeta_F(t)M_{VR}u_F(t)]. \quad (267)$$

Vale recordar que na Subseção 3.3.1 demonstrou-se que a variável instrumental pode ser escrita como:

$$\zeta_F(t) = \varphi_{0F}(t) + \varphi'_F(t), \quad (268)$$

onde $\varphi'_F(t)$ é o vetor regressor do VRFT que contém o ruído presente na saída $y'(t)$ e $y'(t)$ é a saída obtida com dados de um segundo experimento no processo ou com uma simulação de um modelo identificado da planta $G_0(q)$. A partir desta observação, o termo $\bar{E}\zeta_F(t)M_{VR}\varphi_F(t)^T$ também pode ser simplificado, do mesmo modo que realizado em análises anteriores. Com um desenvolvimento similar ao apresentado nas equações (124) e (125), conclui-se que

$$\bar{E}\zeta_F(t)M_{VR}\varphi_F(t)^T = \bar{E}\varphi_{0F}(t)M_{VR}\varphi_{0F}(t)^T = R_{\varphi_{0MF}}. \quad (269)$$

Ainda, usando a relação $u_F(t) = \varphi_{0F}(t)^T \rho_0$, o termo $\bar{E}\zeta_F(t)M_{VR}u_F(t)$ também é reescrito, de forma análoga ao que foi realizado nas equações (127), (128) e (129):

$$\bar{E}\zeta_F(t)M_{VR}u_F(t) = \bar{E}\zeta_F(t)M_{VR}\varphi_{0F}(t)^T \rho_0 \quad (270)$$

$$= \bar{E}\varphi_{0F}(t)M_{VR}\varphi_{0F}(t)^T \rho_0 = R_{\varphi_{0MF}} \rho_0. \quad (271)$$

Enfim, substituindo as expressões obtidas em (269) e (271), obtém-se a seguinte relação para a estimativa assintótica:

$$\hat{\rho}_{VI}^{reg} = [P_{VR}R_{\varphi_{0MF}} + I]^{-1} P_{VR}R_{\varphi_{0MF}} \rho_0. \quad (272)$$

Com uma simples manipulação na equação exposta acima, é possível verificar que a mesma é equivalente a

$$\hat{\rho}_{VI}^{reg} = [R_{\varphi_{0MF}} + P_{VR}^{-1}]^{-1} R_{\varphi_{0MF}} \rho_0. \quad (273)$$

Perceba que, nesta circunstância, a diferença assintótica entre a estimativa e o vetor de parâmetros ideais é dada por:

$$\hat{\rho}_{VI}^{reg} - \rho_0 = \left[(R_{\varphi_{0MF}} + P_{VR}^{-1})^{-1} R_{\varphi_{0MF}} - I \right] \rho_0. \quad (274)$$

Por (274), é possível concluir que a estimativa de ρ_0 pelo método do VRFT com VI regularizada é não consistente, ou seja, é polarizada para $N \rightarrow \infty$. Também, como era de se esperar e como ocorre nos problemas de identificação de modelo FIR com regularização e no VRFT com MQPR, note que a polarização é função da matriz P_{VR} .

Para calcular a covariância desta estimativa, um desenvolvimento análogo ao apresentado em (SÖDERSTRÖM, 2018) é necessário. Tal desenvolvimento foi realizado em (RALLO et al., 2016), onde o autor demonstra a matriz de covariância para as estimativas do método VRFT SISO com variável instrumental regularizada. Ao estender para o caso MIMO, conclui-se que:

$$Cov_{VI}^{reg} = E[(\hat{\rho}_{VI}^{reg} - E[\hat{\rho}_{VI}^{reg}])(\hat{\rho}_{VI}^{reg} - E[\hat{\rho}_{VI}^{reg}])^T] \approx \frac{\Lambda_{VI}^{reg}}{N}, \quad (275)$$

com

$$\Lambda_{VI}^{reg} = (P_{VR}R_{\varphi_{0MF}} + I)^{-1} P_{VR} \mathbf{R}_{VI}^{reg} P_{VR} (R_{\varphi_{0MF}} P_{VR} + I)^{-1}, \quad (276)$$

e onde

$$\mathbf{R}_{VI}^{reg} = E \left[\left(\sum_{i=0}^{\infty} \zeta_F(t+i) K_i \right) M_{VR} \sigma_w M_{VR} \left(\sum_{j=0}^{\infty} K_j^T \zeta_F(t+j)^T \right) \right] \quad (277)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} K_i q^i = F(q) C_d(q) [T_d(q)^{-1} - I] H_0(q). \quad (278)$$

Ainda, conforme estudado anteriormente nesta dissertação, pode-se escrever a matriz de MSE da estimativa do VRFT com VI regularizada ao combinar as expressões de polarização e covariância. Desta forma, a matriz de MSE assintótica para a metodologia aqui proposta é calculada pela expressão

$$MSE_{VI}^{reg} = (\hat{\rho}_{VI}^{reg} - \rho_0)(\hat{\rho}_{VI}^{reg} - \rho_0)^T + Cov_{VI}^{reg}. \quad (279)$$

Ainda, visando simplificar a expressão da matriz de MSE aqui estudada, destaca-se que a polarização, apresentada na equação (274), pode ser reescrita como

$$\hat{\rho}_{VI}^{reg} - \rho_0 = -(P_{VR}R_{\varphi_{0MF}} + I)^{-1} \rho_0. \quad (280)$$

Assim, ao calcular a expressão da MSE assintótica, conclui-se que:

$$MSE_{VI}^{reg} = (P_{VR}R_{\varphi_{0MF}} + I)^{-1} (\rho_0 \rho_0^T + P_{VR} \mathbf{R}_{VI}^N P_{VR}) (R_{\varphi_{0MF}} P_{VR} + I)^{-1}, \quad (281)$$

com $\mathbf{R}_{VI}^N = \mathbf{R}_{VI}^{reg}/N$.

Enfim, de posse da matriz de MSE expressa acima, algumas observações importantes podem ser realizadas. Primeiramente, percebe-se que a matriz de MSE é função das matrizes P_{VR} e M_{VR} . Portanto, a escolha destas matrizes é fundamental para aprimorar a qualidade das estimativas. Ainda, é importante ressaltar que, ao contrário do que se consegue desenvolver para a matriz de MSE do problema de identificação de modelos FIR por MQPR, na abordagem proposta nesta dissertação não é possível calcular uma matriz ótima de regularização.

Assim sendo, dada a importância da escolha das matrizes de ponderação M_{VR} e regularização P_{VR} para a técnica do VRFT com VI regularizada, a próxima seção do texto discute uma maneira para obtê-las a partir dos dados coletados no processo, utilizando uma interpretação Bayesiana do procedimento de identificação.

5.3 Escolha das matrizes de ponderação e regularização

A partir do desenvolvimento realizado acima e a partir do que foi estudado no Capítulo 4 desta dissertação, é possível perceber que as matrizes de regularização P_{VR} e de ponderação M_{VR} impactam diretamente na qualidade das estimativas produzidas pelas metodologias aqui propostas. Assim sendo, a definição destas matrizes é de fundamental importância para atingir bons resultados.

Neste sentido, os trabalhos (FORMENTIN; KARIMI, 2014; RALLO et al., 2016) propõem duas abordagens, usando diferentes tipos de *informações a priori*. Nesta dissertação, a metodologia escolhida para um estudo mais aprofundado e para a extensão ao cenário de sistemas multivariáveis foi aquela proposta em (RALLO et al., 2016), enquanto a que foi proposta em (FORMENTIN; KARIMI, 2014) será apenas levemente discutida na sequência, a título de informação.

No trabalho (FORMENTIN; KARIMI, 2014), a escolha da matriz de regularização é baseada em algumas informações *a priori* sobre o controlador, o que está de acordo com a nova perspectiva de identificação de sistemas com regularização, demonstrada no Capítulo 4 desta dissertação. No entanto, tais informações são obtidas por meio de um procedimento preliminar de identificação da planta $G_0(q)$ e identificação dos parâmetros do controlador $C(q,\rho)$. Cabe ressaltar que a identificação preliminar da planta é realizada com um modelo FIR de alta ordem e com o procedimento tradicional de identificação por mínimos quadrados, enquanto a identificação preliminar dos parâmetros do controlador é desenvolvida com a formulação tradicional do VRFT com variáveis instrumentais.

Dessa forma, com as informações *a priori* obtidas nos procedimentos acima, os autores sintetizam um problema de otimização convexo para estimar a matriz de regularização P_{VR} , que não será demonstrado aqui, mas que pode ser visualizado com mais detalhes no artigo (FORMENTIN; KARIMI, 2014). Perceba que isto é uma grande vantagem da técnica referida, em contraste com o procedimento de estimação da matriz de regularização para a metodologia dos MQPR, apresentada em 4.2.2, a qual é baseada em um problema de otimização não convexo. No entanto, conforme fora exposto em (RALLO et al., 2016), os resultados apresentados por este tipo de regularização não são tão eficientes, o que pode ser justificado pelo fato de que as aproximações realizadas para elaboração do problema de estimação de P_{VR} , assim como as informações *a priori* utilizadas, não são muito precisas.

Por outro lado, o artigo (RALLO et al., 2016) propõe uma escolha para a matriz de regularização baseada na interpretação Bayesiana do procedimento de identificação, da mesma forma que o estudado na Subseção 4.2.1 desta dissertação. Com este tipo de escolha, o autor demonstra que é possível aprimorar os resultados, em comparação com o trabalho (FORMENTIN; KARIMI, 2014). Por este motivo, uma escolha análoga, a qual é baseada em uma aproximação, será empregada nesta dissertação para as matrizes de ponderação e regularização do VRFT MIMO regularizado.

5.3.1 Escolha baseada na interpretação Bayesiana

De acordo com que foi estudado no Capítulo 4 desta dissertação, na metodologia de identificação de sistemas FIR com regularização por meio do MQPR, a escolha das matrizes de ponderação e regularização é realizada com base na interpretação Bayesiana do processo de identificação. Assim sendo, no trabalho (RALLO et al., 2016) uma escolha semelhante é desenvolvida, a qual também é explorada nesta dissertação para a utilização no VRFT MIMO com VI regularizada. No entanto, antes de introduzir a identificação

pela interpretação Bayesiana, é interessante desenvolver uma abordagem estocástica para a identificação do controlador por meio do VRFT, de forma análoga ao que é realizado no Apêndice A desta dissertação para a identificação de modelos FIR.

Em um primeiro momento, então, considere escrever o problema do VRFT por mínimos quadrados no formato matricial, onde todos os instantes de tempo são armazenados em um mesmo vetor. Neste cenário, o modelo do controlador é dado por

$$U = \phi_{vr}\rho, \quad (282)$$

onde o vetor $U \in \mathbb{R}^{Nn}$ contém todos os elementos de $u(t)$ do instante de tempo $t = 1$ até $t = N$, ou seja:

$$U = [u_1(1), \dots, u_1(N) | u_2(1), \dots, u_2(N) | \dots | u_n(1), \dots, u_n(N)]^T, \quad (283)$$

e a matriz ϕ_{vr} (aqui o subscrito “ vr ” foi adotado para denotar a matriz de vetores regressores do método VRFT) é organizada da seguinte forma

$$\phi_{vr} = \text{diag}(\phi_{vr_1}, \phi_{vr_2}, \dots, \phi_{vr_n}), \quad (284)$$

com $\text{diag}(\cdot)$ representando uma matriz bloco diagonal e $\phi_{vr} \in \mathbb{R}^{Nn \times p}$. Além disso, cada ϕ_{vr_i} é composta por

$$\phi_{vr_i} = [\varphi_i(1) \quad \varphi_i(2) \quad \dots \quad \varphi_i(N)]^T, \quad \phi_{vr_i} \in \mathbb{R}^{N \times p_i}, \quad (285)$$

onde o vetor regressor $\varphi_i(t)$ para o VRFT foi definido na equação (76) e $p_i = \sum_{j=1}^m p_{ij}$, conforme foi apresentado na Seção 3.2, a qual introduz a metodologia tradicional do VRFT MIMO nesta dissertação. Perceba que neste formato matricial, o critério minimizado pelo VRFT, expresso por (72) na Seção 3.2, pode ser escrito como:

$$\hat{\rho}_{VRM} = \arg \min_{\rho} \|U - \phi_{vr}\rho\|_2^2, \quad (286)$$

e que a solução analítica do problema é dada pelo método dos mínimos quadrados ordinários:

$$\hat{\rho}_{VRM} = (\phi_{vr}^T \phi_{vr})^{-1} \phi_{vr}^T U. \quad (287)$$

Agora, outra perspectiva para a solução do problema é a interpretação estocástica deste procedimento de identificação. É importante destacar que esta interpretação não irá fornecer uma solução ideal para o problema do VRFT, mas irá auxiliar na definição de um *modelo estocástico* para o controlador, que será utilizado na interpretação Bayesiana, possibilitando uma escolha coerente para as matrizes de regularização e ponderação. Assim, na interpretação estocástica do VRFT, considera-se que o vetor U é descrito pelo seguinte modelo (note que este modelo é, na verdade, uma aproximação do modelo do controlador ideal):

$$U = \phi_{vr}\rho + D_e, \quad (288)$$

onde ϕ_{vr} é aproximado por uma quantidade determinística e D_e é uma variável aleatória com a seguinte distribuição Gaussiana $D_e \sim \mathcal{N}(0, I)$. Portanto, a partir deste modelo estocástico para a variável U , pode-se dizer que a mesma também é Gaussiana e apresenta a seguinte distribuição:

$$U \sim \mathcal{N}(\phi_{vr}\rho, I). \quad (289)$$

Nesta abordagem estocástica do VRFT, para estimar o vetor de parâmetros ρ , utiliza-se a técnica de máxima verossimilhança, maximizando a probabilidade de que ρ tenha gerado os dados U :

$$\hat{\rho}_{VRe} = \arg \max_{\rho} f(U|\rho), \quad (290)$$

$$f(U|\rho) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{Nn}}} e^{-\frac{1}{2}(U-\phi_{vr}\rho)^T(U-\phi_{vr}\rho)}, \quad (291)$$

onde $f(U|\rho)$ é a função densidade de probabilidade de U , dado o modelo expresso em (288). Enfim, conforme mostra o Apêndice A desta dissertação, resolver o problema descrito em (290) para variáveis Gaussianas, é equivalente a resolver o problema de mínimos quadrados ponderados, desde que a matriz de ponderação M seja igual à matriz de covariância de U .

Neste caso, como no modelo aqui considerado, a matriz de covariância de U é igual à matriz identidade, então resolver o problema descrito em (288) é equivalente a resolver o problema de mínimos quadrados ordinário descrito em (286), cuja solução é dada por (287). Portanto, a principal conclusão que se pode tirar deste desenvolvimento é que, em uma interpretação estocástica do VRFT, o modelo do controlador deve ser expresso pela equação (288), para garantir a mesma solução do VRFT com MQ. Note que esta interpretação é importante, pois o tal modelo será utilizada posteriormente na interpretação Bayesiana.

Uma vez desenvolvida a análise estocástica acima, pode-se seguir para a análise do problema de identificar o controlador com a metodologia do VRFT com MQPR no formato matricial. Neste contexto, pode-se perceber que a estimativa dos parâmetros é dada por:

$$\hat{\rho}_{VRM}^{reg} = (P_{vr}\phi_{vr}^T M_{vr}\phi_{vr} + I)^{-1} P_{vr}\phi_{vr}^T M_{vr}U, \quad (292)$$

onde $M_{vr} = M_{VR} \otimes I_N$ e $P_{vr} = P_{VR}/N$. Aqui, ao escolher $P_{vr} = P_{VR}/N$, é importante destacar que o efeito assintótico da regularização desapareceria nas análises das propriedades desenvolvidas anteriormente. No entanto, para possibilitar a realização de uma correspondência entre a teoria de identificação de modelos FIR com MQPR e o VRFT com MQPR, é necessário utilizar tal relação.

Considere, agora, a interpretação Bayesiana do procedimento de identificação do controlador. Vale lembrar, que na interpretação Bayesiana, o próprio vetor de parâmetros ρ é considerado uma variável aleatória com distribuição Gaussiana. Portanto, como foi demonstrado na Subseção 4.2.1 deste trabalho e na bibliografia de identificação com regularização, por não ter nenhum conhecimento a priori sobre o vetor de parâmetros ρ , supõe-se que o mesmo tem média igual a zero e uma determinada matriz de covariância Π_{vr} , isto é:

$$\rho \sim \mathcal{N}(0, \Pi_{vr}). \quad (293)$$

Enfim, a partir desta informação a priori sobre ρ e da estrutura do modelo do controlador na interpretação estocástica do VRFT, descrita em (288), foi verificado no Capítulo 4, que a estimativa pela interpretação Bayesiana consiste em maximizar a probabilidade condicional de ocorrer ρ , dado que se mede U , o que pode ser representado matematicamente pela equação que segue:

$$\hat{\rho}_B^{reg} = \arg \max_{\rho} f(\rho|U) = \frac{f(U|\rho)f(\rho)}{f(U)}, \quad (294)$$

com $f(U|\rho)$ sendo a distribuição condicional de U dado ρ e $f(\rho)$ e $f(U)$ sendo as distribuições a priori de ρ e U respectivamente.

Conforme foi discutido na Subseção 4.2.1 do texto, nesta interpretação do problema, as variáveis U e ρ são conjuntamente Gaussianas com a seguinte distribuição:

$$\begin{bmatrix} \rho \\ U \end{bmatrix} \sim \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Pi_{vr} & \Pi_{vr}\phi_{vr}^T \\ \phi_{vr}\Pi_{vr} & \phi_{vr}\Pi_{vr}\phi_{vr}^T + I \end{bmatrix} \right). \quad (295)$$

Usando as relações que foram expostas nas equações (188), (189), (190) e (191) da Subseção 4.2.1, para calcular a distribuição a posteriori de ρ dado que se mede U , é possível calcular a estimativa de ρ pela perspectiva Bayesiana, que consiste em:

$$\hat{\rho}_B^{reg} = (\Pi_{vr}\phi_{vr}^T\phi_{vr} + I)^{-1}\Pi_{vr}\phi_{vr}^T U. \quad (296)$$

Note que, analisando as equações (292) e (296), pode-se concluir que a estimativa resultante do VRFT MIMO por MQPR é semelhante à formulação final da estimativa Bayesiana se a matriz de regularização P_{vr} for escolhida como $P_{vr} = \Pi_{vr}$ e a matriz de ponderação M_{vr} for escolhida como $M_{vr} = I$.

Enfim, com base na estimativa pela perspectiva Bayesiana, se obtém a principal forma de definir as matrizes de regularização P_{vr} e ponderação M_{vr} para a metodologia do VRFT com MQPR e, portanto, a regularização utilizada neste trabalho é denominada regularização Bayesiana. Além disso, cabe salientar que estas definições são baseadas em algumas aproximações realizadas na interpretação estocástica do VRFT. Portanto, pode-se imaginar que existam algumas limitações na metodologia aqui proposta.

Até o momento, se discutiu como escolher as matrizes de ponderação e regularização para realizar a identificação do controlador por meio do VRFT com MQPR. No entanto, ainda resta definir a escolha para a metodologia de variável instrumental regularizada. Neste sentido, perceba que a estimativa de ρ com a VI regularizada, apresentada em (266), também pode ser escrita como:

$$\hat{\rho}_{VI}^{reg} = (P_{vr}\xi_{vr}^T M_{vr}\phi_{vr} + I)^{-1}P_{vr}\xi_{vr}^T M_{vr}U, \quad (297)$$

onde a matriz ξ_{vr} contém as variáveis instrumentais e é organizada da seguinte forma

$$\xi_{vr} = \text{diag}(\xi_{vr_1}, \xi_{vr_2}, \dots, \xi_{vr_n}), \quad (298)$$

com $\xi_{vr} \in \mathbb{R}^{Nn \times p}$ e cada ξ_{vr_i} sendo composta pelas variáveis instrumentais

$$\xi_{vr_i} = [\zeta_i(1) \quad \zeta_i(2) \quad \dots \quad \zeta_i(N)]^T, \quad \xi_{vr_i} \in \mathbb{R}^{N \times p_i}, \quad (299)$$

lembrando que a matriz $\zeta(t)$ e cada $\zeta_i(t)$ foram definidos na Subseção 3.3.1 desta dissertação, mais especificamente nas equações (119) e (120).

Com base na equação (297) não é possível perceber uma relação entre a interpretação Bayesiana e a estimativa por VI regularizada. Contudo, como mencionado anteriormente, a identificação por MQPR pode ser vista como um caso particular da identificação por VI regularizada. Dessa forma, por não existir outra maneira de escolher P_{vr} e M_{vr} no caso da VI, define-se a escolha baseada naquela que foi desenvolvida para o caso de MQPR, onde $P_{vr} = \Pi_{vr}$ e $M_{vr} = I$, o que resulta em:

$$\hat{\rho}_{VI}^{reg} = (\Pi_{vr}\xi_{vr}^T\phi_{vr} + I)^{-1}\Pi_{vr}\xi_{vr}^T U. \quad (300)$$

O desenvolvimento acima demonstrou como são realizadas as escolhas das matrizes de ponderação M_{vr} e regularização P_{vr} nas metodologias propostas nesta dissertação para estimar o controlador por meio do VRFT MIMO com regularização. Porém, apesar de M_{vr} ser escolhida como $M_{vr} = I$, a matriz P_{vr} ainda é desconhecida e precisa ser estimada. Para tanto, a próxima seção descreve o procedimento que será utilizado nesta metodologia, também proposto em (RALLO et al., 2016) e que é baseado na interpretação Bayesiana desenvolvida acima.

5.3.2 Estimativa e parametrização da matriz de regularização

De forma análoga ao que foi estudado no Capítulo 4 desta dissertação, a definição da matriz Π_{vr} é fundamental para aprimorar a qualidade das estimativas obtidas com o VRFT regularizado (ou por MQPR ou por VI regularizada). Por isso, visando determinar esta quantidade de forma mais precisa e sistemática, para que a regularização contribua no procedimento de identificação do controlador, a mesma será estimada a partir dos dados disponíveis no VRFT: sinal de entrada $u(t)$, coletado do processo, e sinal de erro virtual $\bar{e}(t)$, calculado a partir da saída coletada $y(t)$ e utilizado para montar as matrizes de vetores regressores $\varphi(t)$, ϕ_{vr} e/ou variáveis instrumentais $\zeta(t)$ ou ξ_{vr} . Para realizar esta estimativa, a metodologia utilizada também é baseada naquela desenvolvida no contexto de identificação de modelos FIR, conhecida como Método de Bayes Empírico e explicitado na Subseção 4.2.2 do texto.

Uma vez que o procedimento de estimação da matriz de covariância a priori Π_{vr} é muito semelhante àquele desenvolvido no Capítulo 4 desta dissertação, no contexto de identificação de modelos FIR com MQPR, o mesmo será resumido aqui, onde serão demonstrados somente os principais aspectos para tal estimação no cenário do VRFT.

Para estimar a matriz de covariância a priori, então, é natural parametrizá-la por um vetor de hiperparâmetros, aqui denominado η_{vr} . Também, a partir da aproximação da interpretação Bayesiana realizada anteriormente, considera-se a distribuição marginal do vetor U por meio da equação (295):

$$U \sim \mathcal{N}(0, \phi_{vr} \Pi_{vr}(\eta_{vr}) \phi_{vr}^T + I), \quad (301)$$

e utiliza-se a abordagem de máxima verossimilhança para estimar os hiperparâmetros, maximizando a probabilidade de que eles tenham gerado os dados observados U , ou seja,

$$\hat{\eta}_{vr} = \arg \max_{\eta_{vr}} f(U|\eta_{vr}), \quad (302)$$

onde $f(U|\eta_{vr})$ denota a função de verossimilhança, quando se mede o vetor U . Na Subseção 4.2.2 foram demonstradas algumas manipulações que podem ser realizadas neste problema, que simplificam o mesmo. Realizando o mesmo procedimento para o cenário aqui estudado do VRFT, conclui-se que resolver o problema descrito em (302) é equivalente a resolver:

$$\hat{\eta}_{vr} = \arg \min_{\eta_{vr}} U^T \Psi_{vr}(\eta_{vr}) U + \ln |\Psi_{vr}(\eta_{vr})|, \quad (303)$$

onde $\Psi_{vr}(\eta_{vr}) = \phi_{vr} \Pi_{vr}(\eta_{vr}) \phi_{vr}^T + I$.

Ainda, como também foi discutido na Subseção 4.2.2 e é importante relembrar, resolver o problema de otimização descrito em (303) é uma tarefa complexa, uma vez que este é um problema não convexo, onde podem existir mínimos locais e ocorrer problemas de

mal condicionamento ao calcular a função objetivo. Dessa forma, a ferramenta proposta nesta dissertação para obter a estimativa de $\Pi_{vr}(\eta_{vr})$, a qual também é usada no trabalho (RALLO et al., 2016), é a função *arxRegul()* do MATLAB (LJUNG; SINGH; CHEN, 2015).

Ao utilizar esta função para estimar a matriz $\Pi_{vr}(\eta_{vr})$, então, existem diferentes tipos de parametrização que podem ser empregados. De fato, os tipos de parametrização que podem ser escolhidos na função *arxRegul()* são aqueles que foram desenvolvidos no contexto de identificação de sistemas FIR com regularização e são brevemente listadas na sequência. Porém, antes de discutir os tipos de parametrização é interessante lembrar a estrutura multivariável da matriz de covariância a priori Π_{vr} .

O formato multivariável da parametrização da matriz $\Pi_{vr}(\eta_{vr})$ na função *arxRegul()* segue a mesma ideia que foi desenvolvida na comunidade de identificação para tratar com sistemas multivariáveis. Isto significa que $\Pi_{vr}(\eta_{vr})$ tem a seguinte estrutura:

$$\Pi_{vr}(\eta_{vr}) = \begin{bmatrix} \Pi_{vr}^1(\eta_{vr}^1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Pi_{vr}^2(\eta_{vr}^2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \Pi_{vr}^n(\eta_{vr}^n) \end{bmatrix}, \quad (304)$$

onde $\eta_{vr} = [\eta_{vr}^1 \ \eta_{vr}^2 \ \dots \ \eta_{vr}^n]$ e cada $\Pi_{vr}^i(\eta_{vr}^i)$ está relacionado com os parâmetros da i -ésima saída do sistema identificado. No caso do VRFT, isto significa que cada submatriz $\Pi_{vr}^i(\eta_{vr}^i)$ está relacionada com os parâmetros dos controladores que compõem o i -ésimo sinal de controle $u_i(t)$. Além disso, cada uma dessas submatrizes é particionada como

$$\Pi_{vr}^i(\eta_{vr}^i) = \begin{bmatrix} \Pi_{vr}^{i1}(\eta_{vr}^{i1}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Pi_{vr}^{i2}(\eta_{vr}^{i2}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \Pi_{vr}^{in}(\eta_{vr}^{in}) \end{bmatrix}, \quad (305)$$

com $\eta_{vr}^i = [\eta_{vr}^{i1} \ \eta_{vr}^{i2} \ \dots \ \eta_{vr}^{in}]$. Agora, cada uma destas submatrizes $\Pi_{vr}^{ij}(\eta_{vr}^{ij})$, é relacionada com saída i e a entrada j do sistema identificado. Portanto, como no método VRFT se identifica o controlador para o processo, então, $\Pi_{vr}^{ij}(\eta_{vr}^{ij})$ é a matriz de covariância a priori dos parâmetros do controlador $C_{ij}(q, \rho_{ij})$, de acordo com a estrutura de controladores definida na equação (18) da Subseção 2.2.1 desta dissertação.

Ainda, cada uma das matrizes $\Pi_{vr}^{ij}(\eta_{vr}^{ij})$ é parametrizada conforme os diferentes tipos de parametrização que podem ser escolhidos. Vale lembrar que os principais tipos de parametrização foram discutidos na Subseção 4.2.2 desta dissertação e consistem em:

(i) Diagonal (DI)

$$\Pi_{vr}^{ij}(\eta_{vr}^{ij}, k, l) = \begin{cases} \alpha_{ij} \beta_{ij}^k, & k = l \\ 0, & k \neq l, \end{cases} \quad (306)$$

com $\eta_{vr}^{ij} = [\alpha_{ij} \ \beta_{ij}]$, $\alpha_{ij} > 0$ e $0 < \beta_{ij} < 1$.

(ii) Diagonal/Correlated (DC)

$$\Pi_{vr}^{ij}(\eta_{vr}^{ij}, k, l) = \alpha_{ij} \beta_{ij}^{(k+l)/2} \gamma_{ij}^{|k-l|}, \quad (307)$$

com $\eta_{vr}^{ij} = [\alpha_{ij} \ \beta_{ij} \ \gamma_{ij}]$, $\alpha_{ij} > 0$, $0 < \beta_{ij} < 1$ e $|\gamma_{ij}| \leq 1$.

(iii) Tuned/Correlated (TC)

$$\Pi_{vr}^{ij}(\eta_{vr}^{ij}, k, l) = \alpha_{ij} \beta_{ij}^{\max(k, l)}, \quad (308)$$

com $\eta_{vr}^{ij} = [\alpha_{ij} \beta_{ij}]$, $\alpha_{ij} > 0$ e $0 < \beta_{ij} < 1$.

(iv) Stable-Spline (SS)

$$\Pi_{vr}^{ij}(\eta_{vr}^{ij}, k, l) = \alpha_{ij} \left(\frac{\beta_{ij}^{k+l+\max(k, l)}}{2} - \frac{\beta_{ij}^{3\max(k, l)}}{6} \right), \quad (309)$$

com $\eta_{vr}^{ij} = [\alpha_{ij} \beta_{ij}]$, $\alpha_{ij} > 0$ e $0 < \beta_{ij} < 1$.

Uma importante observação que deve ser feita neste contexto é que as parametrizações exibidas acima foram desenvolvidas a partir do problema de identificação de modelos FIR de alta ordem e que, portanto, buscam aproximar o comportamento de sistemas dinâmicos com características de respostas com decaimento exponencial e/ou suaves. Porém, note que no VRFT o objeto a ser identificado é um controlador, classe de sistemas que geralmente não apresenta característica de resposta exponencial e nem suave. Dessa forma, pode-se destacar que esta é outra limitação da abordagem proposta na metodologia desta dissertação e do trabalho apresentado em (RALLO et al., 2016). Assim sendo, pode-se afirmar que devem existir parametrizações mais coerentes para a identificação de controladores, mas que este assunto será tema para trabalhos futuros.

Finalmente, após definidas as escolhas das matrizes de ponderação e regularização para as metodologias do VRFT MIMO com regularização, é preciso avaliar se a metodologia aqui proposta realmente é capaz de aprimorar as propriedades das estimativas e o desempenho dos sistemas em malha fechada. Perceba que, uma vez que a matriz P_{vr} é estimada a partir da solução numérica de um problema de otimização, não é possível fazer esta análise de forma teórica. Assim sendo, a próxima seção exhibe alguns exemplos numéricos que comparam o VRFT MIMO regularizado com as metodologias tradicionais do VRFT.

5.4 Exemplos numéricos

Para avaliar a eficiência das extensões propostas para o VRFT MIMO nesta dissertação e compará-las com as formulações tradicionais do método, esta seção do texto exhibe alguns exemplos numéricos. Nos exemplos, o principal objetivo é controlar o processo que também foi utilizado no exemplo motivacional da Subseção 3.3.2 e que é descrito pelas matrizes de transferência:

$$G_0(q) = \begin{bmatrix} \frac{0,09516}{q - 0,9048} & \frac{0,03807}{q - 0,9048} \\ \frac{-0,02974}{q - 0,9048} & \frac{0,04758}{q - 0,9048} \end{bmatrix}, \quad H_0(q) = I. \quad (310)$$

Em um primeiro momento o exemplo motivacional será estendido, onde serão adicionadas as aplicações e comparações das novas formulações do VRFT MIMO com regularização. Vale recordar que, neste cenário, o controlador ideal $C_d(q)$ pertence à classe dos controladores escolhidos \mathcal{C} . Além disso, por ser uma situação importante para o contexto de controle baseado em dados, na Subseção 5.4.2 é desenvolvido um exemplo em que o controlador ideal se encontra fora da classe \mathcal{C} .

5.4.1 Controlador ideal dentro da classe \mathcal{C}

Lembrando o que foi desenvolvido no exemplo motivacional, o modelo de referência definido para o sistema em malha fechada foi

$$T_d(q) = \begin{bmatrix} \frac{0,25}{q - 0,75} & 0 \\ 0 & \frac{0,4}{q - 0,6} \end{bmatrix}. \quad (311)$$

Com esta escolha, o controlador ideal possui a estrutura de um controlador PI cheio, classe que também foi escolhida para controlar o processo. Vale lembrar, então, que a estrutura do controlador sintonizado nos exemplos é dada por

$$C(q, \rho) = \begin{bmatrix} \frac{\rho_{11}^0 q + \rho_{11}^1}{q - 1} & \frac{\rho_{12}^0 q + \rho_{12}^1}{q - 1} \\ \frac{\rho_{21}^0 q + \rho_{21}^1}{q - 1} & \frac{\rho_{22}^0 q + \rho_{22}^1}{q - 1} \end{bmatrix}. \quad (312)$$

Assim sendo, pela Premissa 2.1, sabe-se que o controlador ideal pode ser escrito como $C_d(q) = C(q, \rho_0)$, onde o vetor de parâmetros ideais é

$$\rho_0 = [2,012; -1,902; -2,690; 2,434; 1,314; -1,189; 6,725; -6,085]^T. \quad (313)$$

A coleta de dados para utilização nos exemplos também foi idêntica ao que fora realizado no exemplo motivacional. Foram simulados dois experimentos em malha aberta com uma entrada do tipo PRBS, com amplitude unitária e tamanho $N = 500$. A variância do ruído branco $w(t)$ foi definida de forma a garantir uma relação de sinal-ruído de 1,5 (lembrando que este valor representa uma presença elevada de ruído) para cada saída. Além disso, em todas as aplicações, foi empregado o filtro $F(q) = T_d(q)(I - T_d(q))$.

Novamente, para comparar as propriedades das diferentes metodologias, foram executadas 500 rodadas de simulações Monte Carlo com diferentes realizações do ruído e a cada rodada os controladores foram sintonizados com os dados de entrada e saída obtidos e as diferentes formulações do VRFT MIMO regularizado aqui propostas, o MQPR e a VI regularizada.

5.4.1.1 VRFT com MQPR

Inicialmente, a metodologia utilizada para a sintonia dos controladores foi o VRFT MIMO com MQPR. Nesse sentido, cabe lembrar que, a partir da interpretação Bayesiana utilizada nesta dissertação, a matriz de ponderação foi escolhida como $M_{vr} = I$ e a matriz de regularização $P_{vr} = \Pi_{vr}$ foi estimada com a função *arxRegul()* do MATLAB e com os dados $u(t)$ e $\bar{e}(t)$. Ainda, nas comparações são avaliadas as diferentes formas de parametrização para a matriz Π_{vr} , conforme o apresentado anteriormente.

De forma a avaliar as propriedades do VRFT com MQPR em malha fechada, o primeiro e mais importante critério considerado neste exemplo foi a distribuição observada para as funções custo $J_y(\rho)$ nas rodadas de Monte Carlo, que permite medir, de forma quantitativa, o desempenho dos sistemas em malha fechada. Assim como no exemplo motivacional, para cada rodada a função custo foi calculada como

$$J_y(\hat{\rho}) = \sum_{t=1}^N \|[T(q, \hat{\rho}) - T_d(q)]r(t)\|_2^2, \quad (314)$$

lembrando que a referência $r(t)$ foi definida como um vetor de dois saltos unitários, $r_1(t)$ ocorrendo no instante $t = 1$ e $r_2(t)$ ocorrendo no instante $t = 101$, onde o total de amostras utilizados foi $N = 200$.

Os resultados obtidos para as distribuições da função custo nas rodadas de Monte Carlo são exibidos na Figura 13 por meio de diagramas de caixa. Na figura, as duas primeiras colunas são as distribuições das funções custo obtidas com as metodologias tradicionais do VRFT, por MQ e VI. Tais resultados já foram exibidos na Figura 4 do exemplo motivacional, mas são utilizados aqui novamente para servir como base de comparação. Por outro lado, as demais colunas representam as distribuições obtidas com o VRFT por MQPR e diferentes parametrizações para a matriz Π_{vr} : DI (Diagonal), DC (Diagonal/Correlated), TC (Tuned/Correlated) e SS (Stable-Spline).

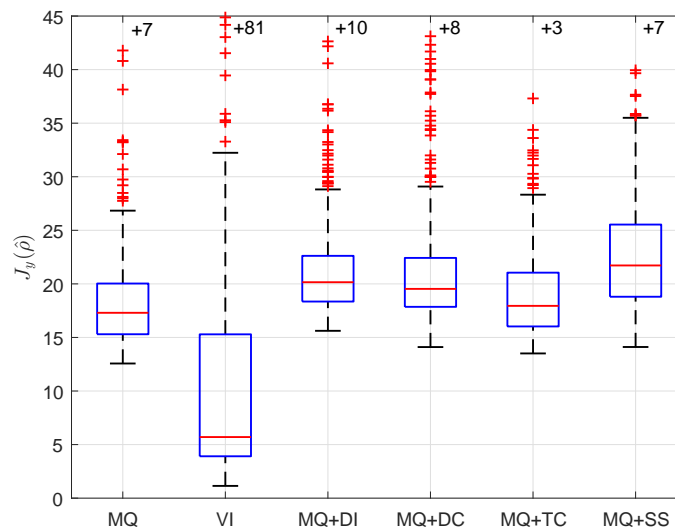


Figura 13: Comparação dos custos $J_y(\hat{\rho})$ para as formulações tradicionais do VRFT MIMO (MQ e VI) e o VRFT com MQPR e diferentes parametrizações da matriz Π_{vr} .

Examinando a figura, fica evidente que não houve uma melhoria nas propriedades dos sistemas em malha fechada com a metodologia aqui explorada. Apesar de ter apresentado menor variância nas distribuições dos custos observados, em relação à técnica tradicional de VI, não houve melhora neste aspecto quando a comparação é feita com a técnica de MQ tradicional. Além disso, os custos observados em geral, assim como sua mediana, foram levemente mais elevados do que aqueles apresentados pelo algoritmo de MQ tradicional, o que é desvantajoso e indica que os comportamentos obtidos foram mais distantes daquele especificado pelo modelo de referência. Também, é importante salientar que, em alguns casos, os sistemas resultantes da metodologia aqui proposta se tornaram instáveis. Neste sentido, o percentual de sistemas instáveis para as diferentes parametrizações foi de: 1,6% com a parametrização do tipo DI e 0,4% com a parametrização do tipo SS. Os outros dois tipos de parametrização (DC e TC) não produziram sistemas instáveis em malha fechada.

Para entender quais os motivos destes resultados em relação aos sistemas em malha fechada, a Tabela 2 demonstra a média obtida para cada parâmetro com a utilização das diferentes formulações do VRFT MIMO. Na tabela, são destacados, em negrito, os valores ideais dos parâmetros (segunda coluna), assim como a norma 2 da diferença entre a média dos parâmetros obtidos e o vetor de parâmetros ideais.

Tabela 2: Comparação das médias obtidas para cada parâmetro nas abordagens tradicionais do VRFT, com MQ e VI, e na abordagem do MQPR com diferentes parametrizações de Π_{vr} .

Parâmetro	ρ_0	MQ	VI	MQ+DI	MQ+DC	MQ+TC	MQ+SS
ρ_{11}^0	2,1016	0,4577	2,1325	0,3927	0,3933	0,3871	0,4601
ρ_{11}^1	-1,9015	-0,3263	-1,9390	-0,2434	-0,3203	-0,2327	-0,3233
ρ_{12}^0	-2,6905	-0,9302	-2,7801	-0,4188	-0,6146	-0,5859	-0,7439
ρ_{12}^1	2,4344	0,6876	2,5300	0,2274	0,4882	0,3746	0,4189
ρ_{21}^0	1,3136	0,1655	1,5791	0,0737	0,0896	0,0860	0,1001
ρ_{21}^1	-1,1886	-0,1027	-1,4698	-0,0337	-0,0689	-0,00780	-0,0244
ρ_{22}^0	6,7252	1,2265	8,2542	0,7922	1,1158	1,2317	1,1211
ρ_{22}^1	-6,0850	-0,8994	-7,6295	-0,5174	-0,8744	-0,8993	-0,7946
$\ E[\hat{\rho}] - \rho_0\ _2$	-	8,4235	2,2120	9,2070	8,6534	8,6236	8,6751

Analisando a tabela, um primeiro ponto que já foi discutido e analisado anteriormente também fica evidente: a metodologia tradicional do VRFT com MQ apresenta uma polarização considerável, enquanto o VRFT com VI apresentou uma polarização menos significativa e que aparece devido ao limitado número de dados nas simulações e limitado número de rodadas de Monte Carlo.

Além disso, um aspecto mais importante para a comparação aqui desenvolvida, que também fica evidente na Tabela 2, é que a polarização do VRFT com MQPR foi um pouco maior se comparada à polarização produzida pela formulação tradicional do VRFT com MQ. Ainda, como mostra a Tabela 3 isto acabou por aumentar algumas das grandezas da matriz de MSE das estimativas, o que indica a pior qualidade das mesmas e explica o pior desempenho dos sistemas em malha fechada resultantes desta formulação do método.

Como mencionado acima, a Tabela 3 demonstra algumas medidas das matrizes de MSE observadas nas rodadas de Monte Carlo. Para cada método, a matriz em questão foi calculada a partir da seguinte equação:

$$\widehat{MSE}(\hat{\rho}) = \frac{1}{500} \sum_{q=1}^{500} (\hat{\rho}_q - \rho_0)(\hat{\rho}_q - \rho_0)^T, \quad (315)$$

onde $\hat{\rho}_q$ denota a estimativa de ρ_0 na q -ésima rodada. É importante destacar que as medidas em questão são utilizadas para mensurar, de alguma forma, o “tamanho” da MSE, permitindo avaliar a qualidade das estimativas. Neste sentido, as medidas utilizadas são: o máximo autovalor (Máximo λ), o mínimo autovalor (Mínimo λ), o traço e o determinante da matriz.

Ao observar a Tabela 3, algumas conclusões podem ser realizadas. Primeiramente, note que a matriz de MSE observada para a metodologia do VRFT com VI apresentou os maiores valores para as medidas consideradas. Este aspecto reforça o que foi verificado no exemplo motivacional e discutido ao longo do texto: a pobre qualidade das estimativas produzidas por esta técnica, o que resulta em propriedades indesejadas dos sistemas em malha fechada.

Além disso, note que, ao comparar a metodologia de MQ com os MQPR, o máximo autovalor e o traço das matrizes de $\widehat{MSE}(\hat{\rho})$ foram sempre maiores para este último, independente da parametrização utilizada. Este fato indica que não há melhora na qualidade das estimativas produzidas por tal metodologia e, portanto, não se pode esperar uma melhora no desempenho dos sistemas em malha fechada.

Tabela 3: Comparação das medidas da matriz $\widehat{MSE}(\hat{\rho})$ para as abordagens tradicionais do VRFT, com MQ e VI, e para abordagem do MQPR com diferentes parametrizações de Π_{vr} .

Método	Máximo λ	Mínimo λ	Traço	Determinante
MQ	70,98	$3,23 \times 10^{-4}$	71,02	$4,64 \times 10^{-17}$
VI	149,7	$1,45 \times 10^{-3}$	165,4	$1,62 \times 10^{-3}$
MQ+DI	84,78	$2,30 \times 10^{-4}$	84,82	$9,83 \times 10^{-18}$
MQ+DC	74,90	$4,07 \times 10^{-5}$	74,94	$2,41 \times 10^{-19}$
MQ+TC	74,39	$2,17 \times 10^{-4}$	74,46	$6,15 \times 10^{-17}$
MQ+SS	75,28	$3,34 \times 10^{-4}$	75,33	$1,14 \times 10^{-16}$

Por fim, ao examinar os resultados obtidos neste exemplo, pode-se afirmar que, de fato, não existe grande vantagem em introduzir regularização na formulação de mínimos quadrados do VRFT MIMO. Pelo exemplo, foi possível verificar que a regularização aumentou a polarização nas estimativas e que isto acarretou em uma deterioração na qualidade das estimativas de ρ_0 . Assim, com propriedades menos adequadas, não há como melhorar o desempenho dos sistemas em malha fechada produzidos por esta metodologia.

5.4.1.2 VRFT com VI regularizada

Agora, após aplicar a metodologia de VRFT MIMO com MQPR para sintonizar o controlador do processo, aqui será demonstrada a aplicação da técnica de VRFT MIMO com VI regularizada. Conforme foi argumentado anteriormente na dissertação, para esta técnica as escolhas da matriz de ponderação e regularização seguem as mesmas ideias daquelas desenvolvidas para o VRFT com MQPR, ou seja, são escolhidas $M_{vr} = I$ e $P_{vr} = \Pi_{vr}$, onde a última também é estimada com a função *arxRegul()* do MATLAB.

Novamente, com o objetivo de avaliar as propriedades desta metodologia na malha fechada do sistema, a primeira análise é realizada com base nas distribuições observadas nas rodadas de Monte Carlo para a função custo $J_y(\hat{\rho})$. Vale lembrar que a função custo foi calculada de acordo com a equação (314), também empregada nos outros exemplos. Os resultados obtidos são demonstrados na Figura 14 através de diagramas de caixa.

Na Figura 14, as duas primeiras colunas demonstram as distribuições observadas para as formulações tradicionais do VRFT MIMO (MQ e VI). Conforme foi explicado anteriormente, estas duas distribuições servem como base de comparação. Além disso, as demais colunas demonstram as distribuições observadas para o VRFT com VI regularizada e diferentes parametrizações da matriz Π_{vr} .

Agora, a Figura 14 mostra que houve uma evolução nas propriedades das funções custo calculadas com a técnica de VI regularizada. Para todas as diferentes parametrizações, as distribuições da função custo foram mais próximas ao custo zero e inclusive todas as medianas foram menores do que àquelas obtidas com as formulações tradicionais do VRFT. Além disso, percebe-se que a covariância dos custos também foi consideravelmente menor, principalmente no caso das parametrizações do tipo DC e TC. No caso das parametrizações DI e SS, houve um maior número de valores considerados discrepantes pelo diagrama, mas que também foi significativamente menor comparado à técnica tradicional de VI.

De modo a demonstrar de forma concreta a melhoria que foi possível atingir no desempenho dos sistemas em malha fechada, a Figura 15 exhibe as respostas ao salto para estes sistemas no melhor cenário aqui obtido (com a parametrização do tipo DC), compa-

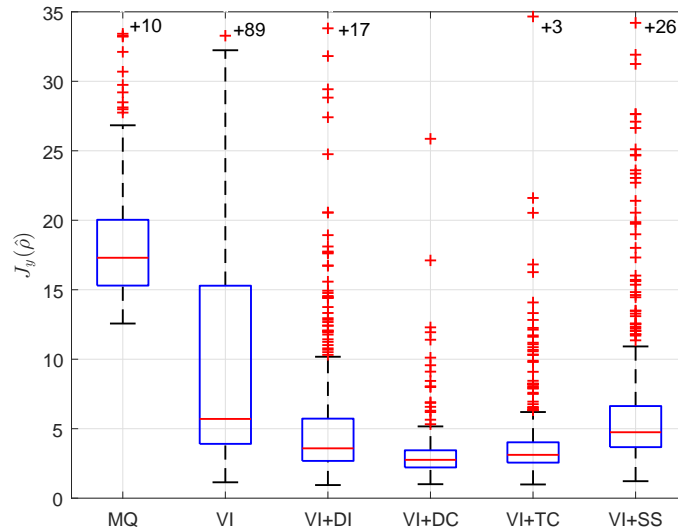


Figura 14: Comparação dos custos $J_y(\hat{\rho})$ para as formulações tradicionais do VRFT MIMO (MQ e VI) e o VRFT com VI regularizada e diferentes parametrizações da matriz Π_{vr} .

rando com o modelo de referência escolhido. Para tanto, nestas simulações, a referência utilizada foi a mesma que fora definida para o cálculo das funções custo exibidas acima e também utilizada no exemplo motivacional. Na figura, as linhas pretas denotam as respostas desejadas e as linhas em azul representam as respostas atingidas com os controladores estimados nas 500 rodadas de Monte Carlo.

Ao comparar as respostas ao salto obtidas com as formulações tradicionais do VRFT MIMO, expostas nas Figuras 5 (MQ) e 6 (VI), com aquela obtida no melhor caso do VRFT com VI regularizada, exposta na Figura 15, também é possível observar uma clara evolução. As respostas exibidas na Figura 15 são muito mais próximas à desejada, quando comparadas àquelas obtidas pela metodologia do VRFT com MQ. Também, estas respostas não apresentam o problema de alta covariância que surgiu para a formulação por VI tradicional e acabou instabilizando o sistema em 14,2% das situações. Neste sentido, vale destacar que a quantidade de sistemas instáveis que resultaram do VRFT com VI regularizado foi: 2% para a parametrização DI, 0,2% para a parametrização TC e 2,8% para a parametrização do tipo SS.

Ainda, visando entender o que ocorre nas estimativas e que gera a melhora de desempenho em malha fechada, na sequência são exibidas algumas medidas de qualidade destas estimativas. No entanto, ao invés de comparar as polarizações observadas nas amostras, como foi realizado no exemplo anterior, aqui são exibidas as projeções do elipsoide que representa um intervalo de confiança de 95%. Visando resumir a análise, serão exibidos e comparados somente o melhor e o pior cenário obtidos, ou seja, serão comparados os resultados para a formulação de VRFT com VI tradicional e o VRFT com VI regularizada e parametrização do tipo DC. Uma análise mais abrangente das estimativas, comparando todas as formulações, será exibida posteriormente.

Assim como no exemplo motivacional, os elipsoides calculados para este exemplo também são projetado nos planos \mathbb{P}_{11} , \mathbb{P}_{12} , \mathbb{P}_{21} e \mathbb{P}_{22} ². Assim, a Figura 16 demonstra a

²Lembrando que os plano foram definidos no exemplo motivacional e são dados por $\mathbb{P}_{11} = \rho_{11}^0 \times \rho_{11}^1$,

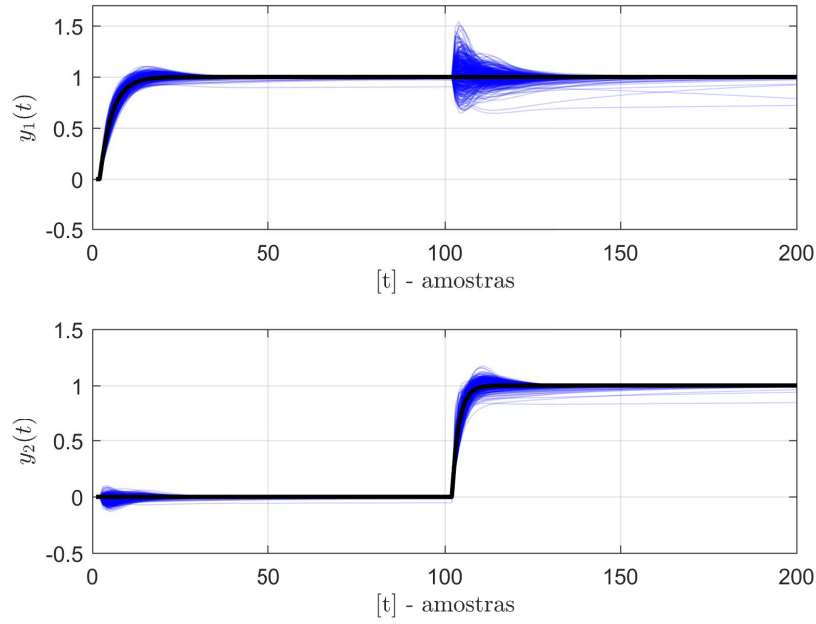


Figura 15: Comparação das respostas em malha fechada nas 500 rodadas de Monte Carlo - VRFT com VI regularizada e parametrização do tipo DC.

projeção dos elipsoides nos planos \mathbb{P}_{11} (a) e \mathbb{P}_{12} (b) e a Figura 17 demonstra a projeção nos planos \mathbb{P}_{21} (a) e \mathbb{P}_{22} (b). Nas figuras, o símbolo ‘*’ em vermelho denota o ponto dos parâmetros ideais no plano respectivo, enquanto o símbolo ‘+’ em preto simboliza a média das estimativas atingidas com a técnica do VRFT com VI. Já o símbolo ‘◇’ simboliza a média atingida com a técnica do VRFT com VI regularizada e parametrização do tipo DC. A elipse em azul representa a projeção do elipsoide relativo às estimativas por VI e as elipses em laranja a projeção do elipsoide relativo às estimativas por VI regularizada com parametrização DC.

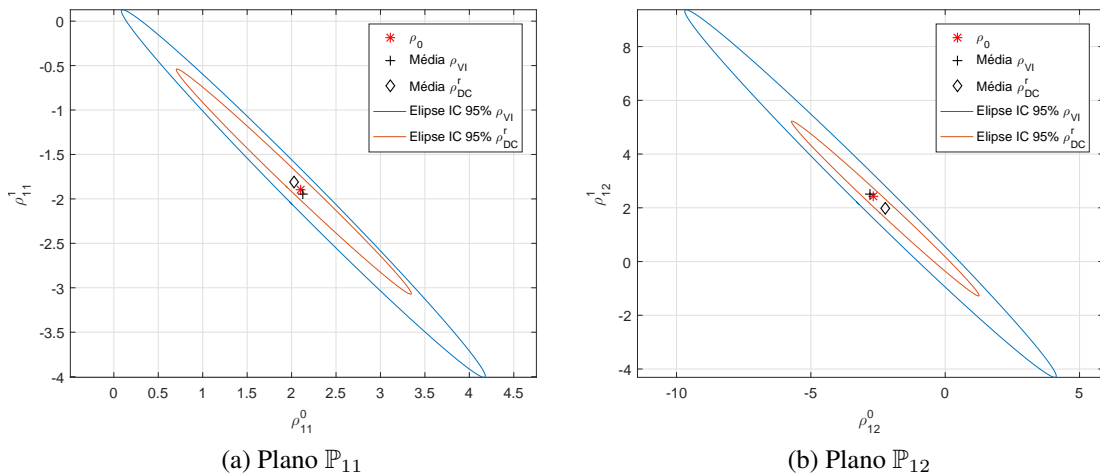


Figura 16: Projeções dos elipsoides nos planos \mathbb{P}_{11} e \mathbb{P}_{12} para as técnicas VRFT com VI (azul) e VRFT com VI regularizada e parametrização do tipo DC (laranja).

Comparando os resultados das Figuras 16 e 17 é possível verificar que as estimativas

$$\mathbb{P}_{12} = \rho_{12}^0 \times \rho_{12}^1, \mathbb{P}_{21} = \rho_{21}^0 \times \rho_{21}^1 \text{ e } \mathbb{P}_{22} = \rho_{22}^0 \times \rho_{22}^1.$$

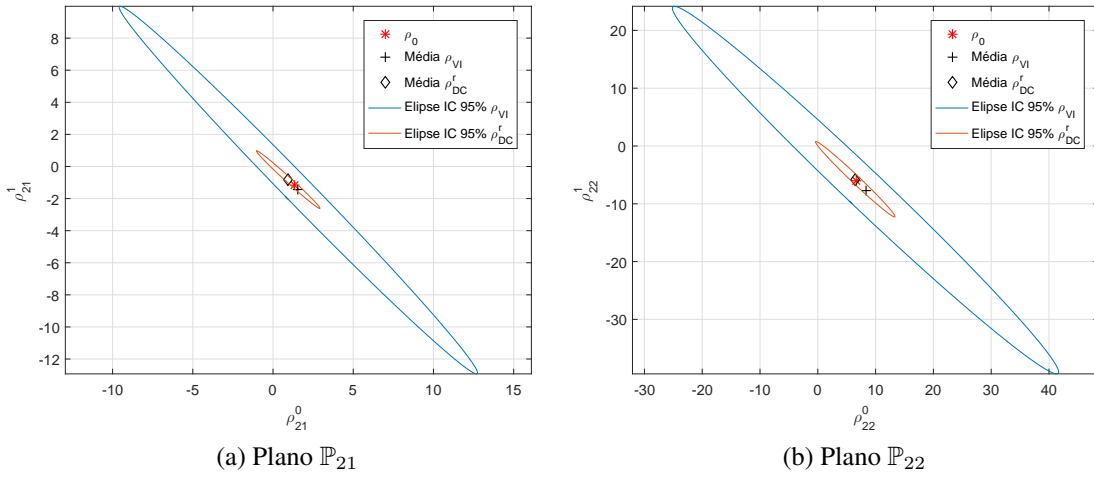


Figura 17: Projeções dos elipsoides nos planos \mathbb{P}_{21} e \mathbb{P}_{22} para as técnicas VRFT com VI (azul) e VRFT com VI regularizada e parametrização do tipo DC (laranja).

obtidas com a formulação da VI regularizada apresentaram uma covariância consideravelmente menor, o que é expresso pelo tamanho das elipses nas figuras. Além disso, um aspecto importante a ser destacado é que a polarização obtida para esta metodologia também foi pouco significativa, ao contrário do que ocorreu para as formulações de VRFT com MQ e MQPR. Portanto, ao reduzir a covariância e ao introduzir uma pequena polarização nas estimativas, a formulação do VRFT com VI regularizada aqui proposta foi capaz de melhorar a qualidade das estimativas neste exemplo.

Apesar de apresentar o melhor resultado para a malha fechada neste exemplo, a melhoria da qualidade das estimativas não foi uma particularidade da parametrização do tipo DC. Para todos os outros tipos de parametrização, um resultado semelhante ao apresentado nas Figuras 16 e 17 foi atingido. Assim, visando demonstrar um resultado que expresse a qualidade das estimativas obtidas para cada formulação e cada parametrização, a Tabela 4 exibe algumas grandezas das matrizes de MSE observadas, do mesmo modo que fora feito no exemplo anterior. Para cada técnica, a matriz de MSE foi calculada pela equação (315).

Tabela 4: Comparação das medidas da matriz $\widehat{MSE}(\hat{\rho})$ para as abordagens tradicionais do VRFT, com MQ e VI, e para abordagem de VI regularizada com diferentes parametrizações de Π_{vr} .

Método	Máximo λ	Mínimo λ	Traço	Deter.
MQ	70,98	$3,23 \times 10^{-4}$	71,02	$4,64 \times 10^{-17}$
VI	149,7	$1,45 \times 10^{-3}$	165,4	$1,62 \times 10^{-3}$
VI+DI	6,352	$9,21 \times 10^{-4}$	8,888	$1,50 \times 10^{-9}$
VI+DC	6,012	$6,12 \times 10^{-4}$	8,850	$2,33 \times 10^{-10}$
VI+TC	3,293	$7,83 \times 10^{-4}$	5,402	$2,56 \times 10^{-10}$
VI+SS	7,712	$1,26 \times 10^{-3}$	11,55	$3,15 \times 10^{-8}$

Ao analisar a tabela, fica claro que os valores obtidos para o máximo autovalor e para o traço foram reduzidos de forma significativa para a formulação de VRFT com VI regularizada. Isto indica que, nestes casos, houve uma melhoria na qualidade das estimativas e, conseqüentemente, isto impactou de forma positiva na malha fechada dos

sistemas, resultando em melhores propriedades para os mesmos.

Cabe destacar que, neste exemplo, os melhores resultados atingidos para os sistemas em malha fechada ocorreram para as parametrizações do tipo DC e TC. Este fato pode ser justificado pois, estes dois tipos de parametrização são mais flexíveis e, mesmo não sendo desenvolvido para o cenário de identificação de controladores, foram capazes de estimar a matriz Π_{vr} de forma adequada, aprimorando a qualidade das estimativas.

Enfim, ao analisar os resultados exibidos neste exemplo, pode-se concluir que a formulação do VRFT com VI regularizada proposta nesta dissertação é mais adequada para aplicação, se comparada à formulação do VRFT com MQPR. Na verdade, o principal foco do VRFT com VI regularizada, como foi discutido anteriormente, é melhorar a qualidade das estimativas produzidas. Como foi visto no exemplo, apesar das simplificações realizadas nesta metodologia, a mesma conseguiu atingir melhores propriedades (reduzindo a covariância e inserindo uma *pequena polarização*), se comparada com as metodologias tradicionais.

5.4.2 Controlador ideal fora da classe \mathcal{C}

Por ser um cenário importante no contexto de controle baseado em modelo de referência, o caso em que o controlador ideal $C_d(q)$ se encontra fora da classe de controladores escolhida para a sintonia é explorado neste exemplo. De fato, este cenário não foi muito discutido e estudado nesta dissertação pois também é pouco estudado na literatura de identificação com regularização e suas propriedades são particulares para cada caso específico.

Visando simplificar a análise e uma vez que não há como definir polarização e MSE para as estimativas, aqui serão analisados somente os critérios que demonstram o comportamento final dos sistemas em malha fechada. Serão avaliadas as distribuições das funções custo $J_y(\rho)$ e as respostas de alguns cenários em malha fechada, para uma referência do tipo salto.

Neste exemplo, deseja-se controlar o mesmo processo dos exemplos anteriores, onde as matrizes de transferência do processo e do ruído foram definidas na equação (310). Ainda, o mesmo modelo de referência do exemplo anterior, descrito em (311), foi utilizado neste exemplo. Como foi verificado, neste caso o controlador ideal é do tipo PI cheio. Porém, agora, para controlar o processo, neste exemplo é proposto o controle PI descentralizado. Com isto, o controlador sintonizado tem a seguinte estrutura:

$$C(q, \rho) = \begin{bmatrix} \frac{\rho_{11}^0 q + \rho_{11}^1}{q - 1} & 0 \\ 0 & \frac{\rho_{22}^0 q + \rho_{22}^1}{q - 1} \end{bmatrix}, \quad (316)$$

o que reforça que $C_d(q) \notin \mathcal{C}$.

Novamente, para verificar o efeito de cada metodologia de sintonia no sistema resultante em malha fechada, foram executadas 500 rodadas de Monte Carlo com diferentes realizações do ruído do processo $w(t)$. Nestas rodadas, dois experimentos em malha aberta foram realizados para a coleta de dados e da variável instrumental. A entrada destes experimentos foi definida como um sinal PRBS de amplitude unitária e tamanho $N = 500$. A variância do ruído foi definida para garantir um SNR de 1,5 para cada saída e o filtro empregado nas aplicações do VRFT foi $F(q) = T_d(q)(I - T_d(q))$.

Primeiramente, foram aplicadas as metodologias tradicionais do VRFT, por MQ e VI. Em seguida, foi aplicada a formulação proposta nesta dissertação de VRFT com MQPR e

com diferentes parametrizações para Π_{vr} . Para compará-las, o primeiro critério adotado, como nos exemplos anteriores, foi a distribuição resultante da função custo $J_y(\rho)$. Lembrando que, nos exemplos, a mesma foi calculada pela equação (314) com uma referência do tipo salto. O resultado obtido para tal critério é exposto na Figura 18 por meio de diagramas de caixa. Nas duas primeiras colunas são exibidas as distribuições da função custo para as formulações tradicionais do VRFT (MQ e VI). Nas demais colunas são exibidas as distribuições calculadas a partir da aplicação do VRFT com MQPR e diferentes parametrizações de Π_{vr} .

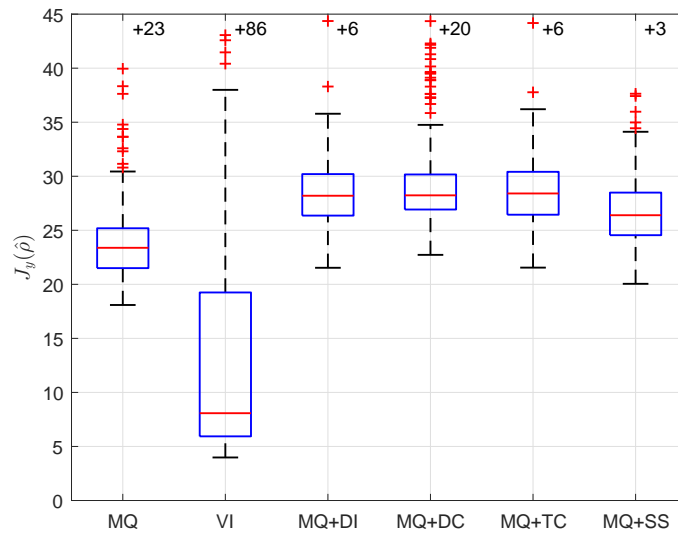


Figura 18: Comparação dos custos $J_y(\hat{\rho})$ para as formulações tradicionais do VRFT MIMO (MQ e VI) e o VRFT com MQPR e diferentes parametrizações da matriz Π_{vr} para o exemplo no qual $C_d(q) \notin \mathcal{C}$.

Ao observar a Figura 18, é possível notar que os resultados obtidos foram muito semelhantes se comparados ao cenário em que o controlador ideal pertencia à classe de controladores escolhidos. Em relação às metodologias tradicionais de ajuste pelo VRFT (MQ e VI), a primeira apresentou valores muito elevados para a distribuição da função custo, enquanto que o principal problema encontrado para segunda foi a alta variância. Como comentado anteriormente, estas características demonstram que os desempenhos resultantes em malha fechada possuem propriedades indesejadas. No caso do VRFT com MQ, os comportamentos são distantes daquele projetado no modelo de referência. Já no VRFT com VI, em algumas situações, o sistema pode apresentar comportamentos muito distintos e até levar o sistema à instabilidade.

Além disso, para a formulação do VRFT com MQPR, é possível notar que os custos obtidos, em geral, também foram bastante elevados e inclusive com uma mediana mais elevada em relação àqueles que foram calculados para o VRFT com MQ. Assim sendo, do mesmo modo que fora concluído para o exemplo anterior, pode-se dizer que as estimativas aqui obtidas não possuem propriedades mais adequadas, se comparadas às formulações tradicionais do VRFT e que, portanto, não conseguem aprimorar o desempenho dos sistemas em malha fechada.

Dessa forma, em um segundo momento foi aplicada, no exemplo aqui apresentado, a formulação proposta nesta dissertação do VRFT MIMO com VI regularizada. De novo,

para comparar cada técnica, o critério considerado foi a distribuição observada para as funções custo. Os resultados obtidos para este cenário são exibidos na Figura 19, por meio de diagramas de caixa. Na Figura, as duas primeiras colunas demonstram as distribuições da função custo para as formulações padrão do VRFT (MQ e VI), usadas como base de comparação, enquanto as demais colunas expõem as distribuições da função custo observadas para a formulação do VRFT com VI regularizada.

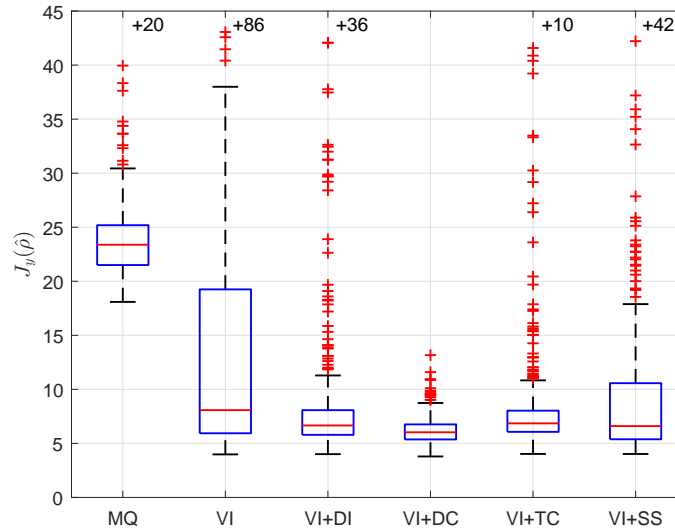


Figura 19: Comparação dos custos $J_y(\hat{\rho})$ para as formulações tradicionais do VRFT MIMO (MQ e VI) e o VRFT com VI regularizada e diferentes parametrizações da matriz Π_{vr} para o exemplo no qual $C_d(q) \notin \mathcal{C}$.

Analisando a Figura 19, conclui-se que o resultado aqui obtido também foi muito semelhante ao resultado atingido no caso em que o controlador ideal se encontrava dentro da classe \mathcal{C} . Para esta formulação, os diagramas de caixa mostram que as propriedades dos sistemas em malha fechada são mais adequadas comparadas às formulações tradicionais e à formulação por MQPR. Um primeiro ponto que pode ser observado é que a mediana dos custos obtidos com a formulação de VI regularizada é mais baixa em relação às outras. Além disso, para os casos de parametrização do tipo DI, DC e TC, as variâncias dos custos foram consideravelmente reduzidas.

Além disso, outro resultado, demonstrado aqui para alguns cenários, é a resposta dos sistemas em malha fechada a uma entrada do tipo salto. Para calcular as respostas, os sistemas foram simulados com os controladores estimados por cada técnica e com a entrada do tipo salto, utilizada para calcular o custo $J_y(\rho)$ exibido acima e nos exemplos anteriores. Para resumir a análise, são exibidas as respostas obtidas com as formulações tradicionais do VRFT (MQ e VI) e a formulação do VRFT com VI regularizada e parametrização do tipo DC. Neste sentido a Figura 20 exibe as respostas ao salto obtidas com o VRFT por MQ, a Figura 21 exibe as respostas obtidas com o VRFT por VI e a Figura 22 exibe as respostas obtidas com o VRFT por VI regularizada. Nas imagens, a linha em preto denota a resposta desejada, projetada no modelo de referência, as linhas em azul representam respostas de sistemas estáveis e as linhas em vermelho a resposta de sistemas instáveis.

Mais uma vez, o resultado obtido é semelhante ao do exemplo em que $C_d(q) \in \mathcal{C}$.

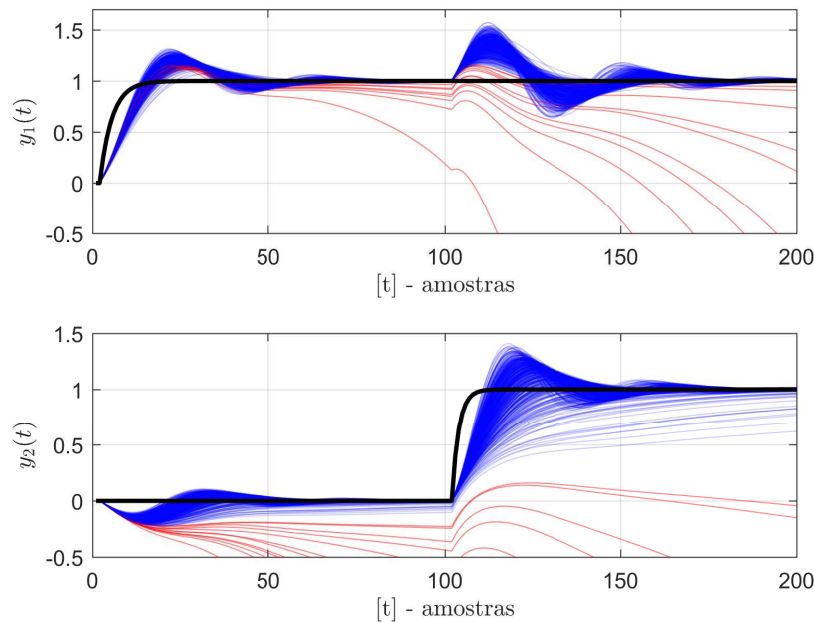


Figura 20: Comparação das respostas em malha fechada nas 500 rodadas de Monte Carlo - VRFT com MQ no exemplo em que $C_d(q) \notin \mathcal{C}$.

Ao observar as respostas dos sistemas obtidos com controladores sintonizados por VRFT com MQ, nota-se que os comportamentos atingidos foram bem distantes daquele especificado no modelo de referência, chegando, até a instabilizar o sistema em 2,4% das vezes. Já ao se analisar os sistemas em malha fechada obtidos pela técnica de VRFT com VI, percebe-se que, em alguns casos, o comportamento atingido é bem próximo ao ideal, mesmo com o controlador fora da classe. Porém, em outros cenários, o comportamento é muito distante do modelo de referência, chegando a instabilizar o sistema em 15% das vezes. Já para o cenário do VRFT com VI regularizada e parametrização do tipo DC, as respostas são muito mais próximas ao comportamento desejado sendo que, em nenhum dos casos, o sistema resultante ficou instável com o controlador obtido. Para os outros tipos de parametrização, o percentual resultante de sistemas instáveis foi de: 4,8% para a parametrização do tipo DI, 0,8% para a parametrização do tipo TC e 4% para a parametrização SS.

Assim sendo, a partir dos resultados observados neste exemplo, também é possível concluir que adicionar a regularização proposta nesta dissertação para o VRFT com MQ não resulta em grande vantagem. Por outro lado, a formulação do VRFT com VI regularizada também apresenta bons resultados, mesmo para o caso de controlador ideal fora da classe \mathcal{C} .

5.5 Considerações finais

Este capítulo demonstrou as novas metodologias, propostas neste trabalho e baseadas na inclusão da ferramenta de regularização, para a identificação de controladores por meio do método do VRFT MIMO.

Inicialmente, alguns conceitos já estudados na dissertação foram revisados, lembrando ao leitor as principais características das formulações tradicionais do VRFT e destacando suas maiores deficiências ao lidar com processos ruidosos, que motivam a introdução de

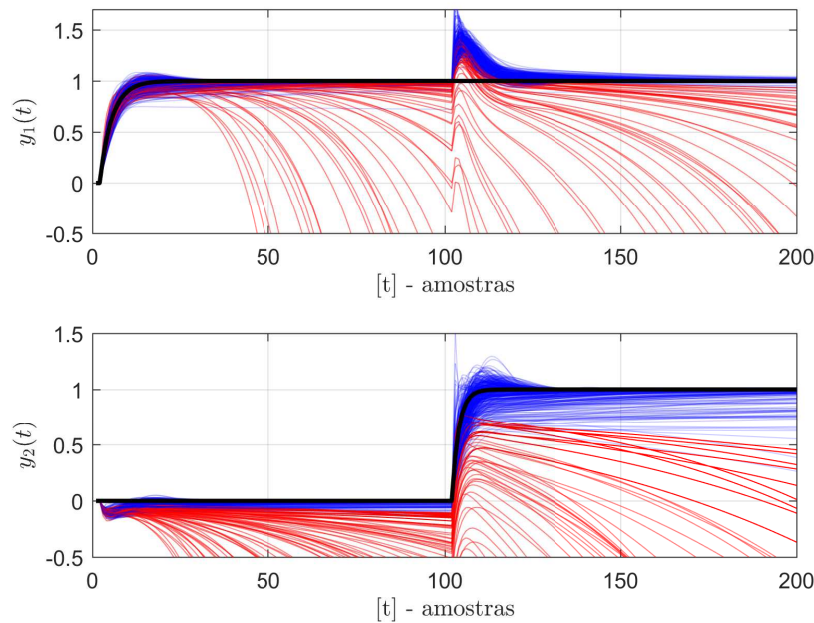


Figura 21: Comparação das respostas em malha fechada nas 500 rodadas de Monte Carlo - VRFT com VI no exemplo em que $C_d(q) \notin \mathcal{C}$.

regularização.

Na sequência, na Seção 5.1, foi introduzida a primeira nova formulação para o VRFT proposta nesta dissertação, o VRFT com MQPR. Ainda nesta seção, foram expostas a forma de calcular esta nova estimativa e algumas propriedades da mesma.

A Seção 5.2, por sua vez, introduziu a segunda nova formulação proposta para o VRFT, obtida ao adicionar a ferramenta de regularização na técnica tradicional de variáveis instrumentais. Também foram demonstradas a forma de calcular a estimativa para esta formulação e algumas propriedades da mesma.

Com as duas novas formulações do VRFT, então, ainda era necessário definir uma maneira de escolher e estimar as matrizes de ponderação e regularização, variáveis importantes para a aplicação das técnicas. Este assunto foi abordado na Seção 5.3, a qual destacou que as escolhas definidas nesta dissertação são baseadas em uma aproximação para a interpretação Bayesiana do procedimento de identificação do controlador ideal.

Finalmente, em 5.4 foram apresentados alguns exemplos numéricos para demonstrar as principais características e propriedades do VRFT com regularização. Nos exemplos, foi verificado que a metodologia do VRFT com MQPR, na verdade, produz estimativas com elevada polarização. Dessa forma, com este método não é possível melhorar a qualidade das estimativas e, portanto, não se pode esperar uma melhora nos desempenhos em malha fechada.

Em contraste, os exemplos numéricos também mostraram que, ao aplicar a metodologia de VRFT com VI regularizada no problema, as propriedades dos sistemas em malha fechada foram aprimoradas. Como foi visto, isto ocorreu pois, neste caso, a regularização adicionou uma pequena polarização e reduziu consideravelmente a covariância das estimativas. Dessa forma, as estimativas apresentaram melhor qualidade.

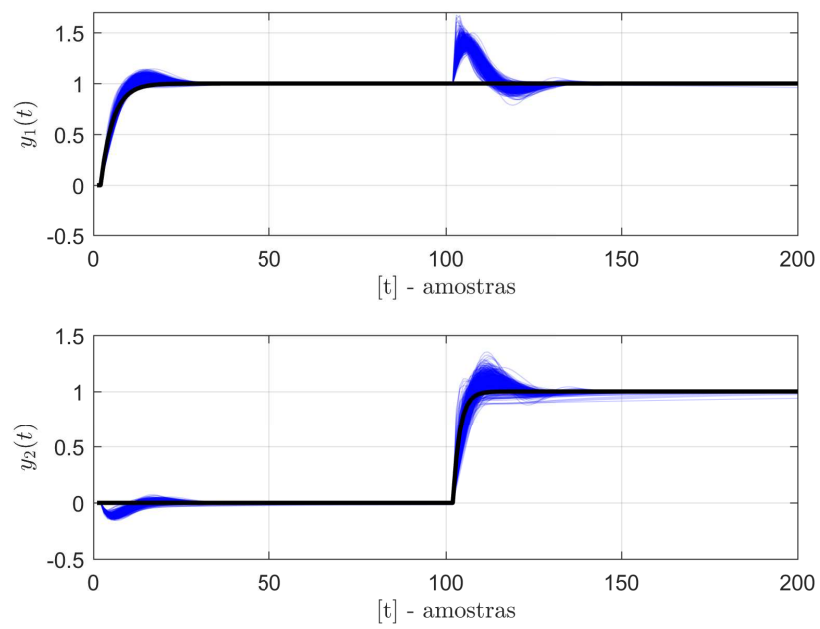


Figura 22: Comparação das respostas em malha fechada nas 500 rodadas de Monte Carlo - VRFT com VI regularizada e parametrização do tipo DC no exemplo em que $C_d(q) \notin \mathcal{C}$.

6 CONCLUSÕES

Neste trabalho foram apresentadas duas novas metodologias para a sintonia de controladores em processos multivariáveis, as quais são baseadas na adição de regularização nas formulações do VRFT MIMO com mínimos quadrados e variáveis instrumentais. A ideia de incluir a regularização foi inspirada nos trabalhos (FORMENTIN; KARIMI, 2014; RALLO et al., 2016), que por sua vez foram desenvolvidos para sistemas monovariáveis a não justificavam de forma detalhada o procedimento de escolha da matriz de regularização.

Neste sentido, antes de apresentar as novas metodologias de sintonia, algumas definições preliminares, fundamentais para o desenvolvimento do trabalho foram expostas no Capítulo 2. Em seguida, para contextualizar o leitor, as formulações padrão do VRFT foram expostas no Capítulo 3, onde também foram apresentadas as propriedades estatísticas destas formulações. Nesta análise das propriedades foi possível concluir que, quando existe uma grande presença do ruído, a formulação do VRFT com mínimos quadrados apresenta o erro de polarização e que isto prejudica de forma substancial o comportamento dos sistemas em malha fechada. Também, foi possível notar que o VRFT com variável instrumental apresenta um elevado erro de covariância e que este fator também prejudica o comportamento dos sistemas resultantes em malha fechada. No Capítulo 4 foi demonstrado o estado da arte de identificação com regularização. Já no Capítulo 5 são apresentados os principais resultados deste trabalho: as metodologias do VRFT com MQPR e com VI regularizada, assim como algumas de suas propriedades e alguns exemplos numéricos.

Foi demonstrado no Capítulo 5 que, para aplicar as extensões aqui propostas para o VRFT, é necessária uma interpretação Bayesiana do método, o que provê a principal ideia de como escolher e estimar duas das principais variáveis do mesmo: a matriz de ponderação e a matriz de regularização. Além disso, para testar a eficiência das técnicas propostas, alguns exemplos numéricos foram apresentados.

A partir dos exemplos numéricos, então, ficaram evidentes algumas características das extensões do VRFT com regularização. Primeiramente, foi possível notar que a formulação do VRFT com MQPR produz estimativas com maior polarização, se comparada à formulação tradicional do VRFT com MQ. Esta característica do método acaba produzindo estimativas com pior qualidade, impossibilitando uma melhora no desempenho dos sistemas em malha fechada.

Por outro lado, foi possível perceber que o VRFT com VI regularizada, acaba produzindo estimativas com uma pequena polarização, mas com uma covariância significativamente menor do que aquela apresentada pela técnica tradicional do VRFT com VI. Assim sendo, com esta formulação as estimativas apresentaram melhores qualidades e, por consequência, no exemplo explorado, as propriedades dos sistemas em malha fe-

chada também foram aprimoradas, especialmente no caso de parametrização do tipo DC, que se mostrou uma estrutura mais flexível e mais adequada para estimar a matriz de regularização.

Por fim, como proposta para trabalhos futuros são sugeridas algumas novas análises e novas formulações. Em primeiro lugar, um aspecto que pode ser desenvolvido em trabalhos futuros é a análise da utilização de outros tipos de variável instrumental, já que neste trabalho, o foco foi dado à variável instrumental baseada no segundo experimento. Também, pretende-se estudar outras formas de parametrização para a matriz de regularização que sejam mais compatíveis com a estrutura de controladores, ao invés de estruturas de sistemas FIR com decaimento exponencial. Ainda, outro fator que pode ser sintetizado e analisado em trabalhos futuros é o cálculo de uma matriz ótima de regularização, que minimize algum critério da matriz de MSE do VRFT, como o traço ou o determinante, por exemplo.

REFERÊNCIAS

ANDERSON, B. D.; MOORE, J. B. **Optimal filtering**. Englewoods Cliff: Prentice Hall, 1979.

BAZANELLA, A. S.; CAMPESTRINI, L.; ECKHARD, D. **Data-driven controller design: the H_2 approach**. Amsterdam: Springer Science & Business Media, 2012.

BOEIRA, E. et al. Comparing MIMO process control methods on a pilot plant. **Journal of Control, Automation and Electrical Systems**, New York, v.29, n.4, p.411–425, 2018.

CAMPESTRINI, L. et al. Virtual reference feedback tuning for non-minimum phase plants. **Automatica**, Tarrytown, v.47, n.8, p.1778 – 1784, 2011.

CAMPESTRINI, L. et al. Unbiased MIMO VRFT with application to process control. **Journal of Process Control**, Tarrytown, v.39, p.35–49, 2016.

CAMPESTRINI, L. et al. Data-driven model reference control design by prediction error identification. **Journal of the Franklin Institute**, Tarrytown, v.354, n.6, p.2628–2647, 2017.

CAMPESTRINI, L.; STEVANATTO FILHO, L. C.; BAZANELLA, A. S. Tuning of multivariable decentralized controllers through the ultimate-point method. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, New York, v.17, n.6, p.1270–1281, 2009.

CAMPI, M. C.; LECCHINI, A.; SAVARESI, S. M. An application of the virtual reference feedback tuning method to a benchmark problem. **European Journal of Control**, London, v.9, n.1, p.66–76, 2003.

CAMPI, M.; LECCHINI, A.; SAVARESI, S. Virtual reference feedback tuning: a direct method for the design of feedback controllers. **Automatica**, Tarrytown, v.38, n.8, p.1337 – 1346, 2002.

CHEN, T.; LJUNG, L. Implementation of algorithms for tuning parameters in regularized least squares problems in system identification. **Automatica**, Tarrytown, v.49, n.7, p.2213–2220, 2013.

CHEN, T.; OHLSSON, H.; LJUNG, L. On the estimation of transfer functions, regularizations and Gaussian processes-Revisited. **Automatica**, Tarrytown, v.48, n.8, p.1525–1535, 2012.

- CORLETA, A. et al. Data-driven control design applied to uninterruptible power supplies. In: IEEE CONFERENCE ON CONTROL APPLICATIONS, 2016, Buenos Aires. **Proceedings...** New York: IEEE, 2016. p.1312–1317.
- DE BRUYNE, F. Iterative feedback tuning for MIMO systems. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON INTELLIGENT AUTOMATION AND CONTROL, 2., 1997, Anchorage. **Proceedings...** Pennsylvania: CiteSeerX, 1997. p.1–8.
- ECKHARD, D.; BAZANELLA, A. S. Optimizing the convergence of data-based controller tuning. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering**, London, v.226, n.4, p.563–574, 2012.
- ECKHARD, D.; CAMPESTRINI, L.; BOEIRA, E. C. Virtual disturbance feedback tuning. **IFAC Journal of Systems and Control**, Tarrytown, v.3, p.23–29, 2018.
- EL-AWADY, K.; HANSSON, A.; WAHLBERG, B. Application of iterative feedback tuning to a thermal cycling module. In: IFAC WORLD CONGRESS, 14., 1999, Beijing. **Proceedings...** New York: IFAC, 1999. v.32, n.2, p.4664–4669.
- ELDAR, Y. C. Uniformly improving the cramer-rao bound and maximum-likelihood estimation. **IEEE Transactions on Signal Processing**, New York, v.54, n.8, p.2943–2956, 2006.
- FORMENTIN, S.; KARIMI, A. Enhancing statistical performance of data-driven controller tuning via L2-regularization. **Automatica**, Tarrytown, v.50, n.5, p.1514–1520, 2014.
- FORMENTIN, S.; SAVARESI, S. Noniterative data-driven design of multivariable controllers. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL AND EUROPEAN CONTROL CONFERENCE, 50., 2011, Orlando. **Proceedings...** New York: IEEE, 2011. p.5106–5111.
- FORMENTIN, S.; SAVARESI, S.; DEL RE, L. Non-iterative direct data-driven controller tuning for multivariable systems: theory and application. **IET Control Theory & Applications**, London, v.6, n.9, p.1250–1257, 2012.
- GONÇALVES DA SILVA, G. R. **Especificação do modelo de referência em projeto de controladores multivariáveis discretos**. 2016. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016.
- GONÇALVES DA SILVA, G. R.; BAZANELLA, A.; CAMPESTRINI, L. On the choice of an appropriate reference model for control of multivariable plants. **Transactions on Control Systems Technology**, New York, 2018.
- GONÇALVES DA SILVA, G. R.; CAMPESTRINI, L.; BAZANELLA, A. S. Multivariable virtual reference feedback tuning for non-minimum phase plants. **IEEE Control Systems Letters**, New York, v.2, n.1, p.121–126, 2018.
- GOODWIN, G. C.; GEVERS, M.; NINNESS, B. Quantifying the error in estimated transfer functions with application to model order selection. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.37, n.7, p.913–928, 1992.

GRAHAM, A.; YOUNG, A.; XIE, S. Rapid tuning of controllers by IFT for profile cutting machines. **Mechatronics**, Tarrytown, v.17, n.2, p.121 – 128, 2007.

HALEVI, Y.; PALMOR, Z. J.; EFRATI, T. Automatic tuning of decentralized PID controllers for MIMO processes. **Journal of Process Control**, Tarrytown, v.7, n.2, p.119–128, 1997.

HJALMARSSON, H. Efficient tuning of linear multivariable controllers using iterative feedback tuning. **International Journal of Adaptive Control and Signal Processing**, New Jersey, v.13, n.7, p.553–572, 1999.

HJALMARSSON, H.; BIRKELAND, T. Iterative feedback tuning of linear time-invariant MIMO systems. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 37., 1998, Tampa. **Proceedings...** New York: IEEE, 1998. v.4, p.3893–3898.

HJALMARSSON, H. et al. Iterative feedback tuning: theory and applications. **IEEE Control Systems**, New York, v.18, n.4, p.26–41, 1998.

HJALMARSSON, H.; GUNNARSSON, S.; GEVERS, M. A convergent iterative restricted complexity control design scheme. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 33., 1994, Lake Buena Vista. **Proceedings...** New York: IEEE, 1994. v.2, p.1735–1740.

HOU, Z.-S.; WANG, Z. From model-based control to data-driven control: survey, classification and perspective. **Information Sciences**, Tarrytown, v.235, p.3–35, 2013.

HUFF, D. D. **Identificação do controlador ótimo multivariável para seguimento de referência**. 2016. Trabalho de conclusão (Graduação) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016.

HUFF, D. D.; GONÇALVES DA SILVA, G. R.; CAMPESTRINI, L. Data-driven control design by prediction error identification for a refrigeration system based on vapor compression. In: IFAC CONFERENCE ON ADVANCES IN PID CONTROL, 3., 2018, Ghent. **Proceedings...** New York: IFAC, 2018. p.704–709.

JANSSON, H.; HJALMARSSON, H. Gradient approximations in iterative feedback tuning for multivariable processes. **International Journal of Adaptive Control and Signal Processing**, New Jersey, v.18, n.8, p.665–681, 2004.

KAMMER, L. C.; BITMEAD, R. R.; BARTLETT, P. L. Direct iterative tuning via spectral analysis. **Automatica**, Tarrytown, v.36, n.9, p.1301–1307, 2000.

KARIMI, A.; MIŠKOVIĆ, L.; BONVIN, D. Iterative correlation-based controller tuning with application to a magnetic suspension system. **Control Engineering Practice**, Tarrytown, v.11, n.9, p.1069–1078, 2003.

KARIMI, A.; MIŠKOVIĆ, L.; BONVIN, D. Iterative correlation-based controller tuning. **International Journal of Adaptive Control and Signal Processing**, New Jersey, v.18, n.8, p.645–664, 2004.

- KARIMI, A.; VAN HEUSDEN, K.; BONVIN, D. Non-iterative data-driven controller tuning using the correlation approach. In: EUROPEAN CONTROL CONFERENCE, 2007, Kos. **Proceedings...** New York: IEEE, 2007. p.5189–5195.
- LJUNG, L. **System Identification: theory for the user**. 2.ed. Englewoods Cliff: Prentice Hall, 1999.
- LJUNG, L.; SINGH, R.; CHEN, T. Regularization features in the system identification toolbox. **IFAC-PapersOnLine**, Tarrytown, v.48, n.28, p.745–750, 2015.
- LOH, A.; VASNANI, V. Describing function matrix for multivariable systems and its use in multiloop PI design. **Journal of Process Control**, Tarrytown, v.4, n.3, p.115–120, 1994.
- MIŠKOVIĆ, L. et al. Correlation-based tuning of decoupling multivariable controllers. **Automatica**, Tarrytown, v.43, n.9, p.1481–1494, 2007.
- NAKAMOTO, M. An application of the virtual reference feedback tuning for an MIMO process. In: SICE ANNUAL CONFERENCE, 2004, Sapporo. **Proceedings...** Tokyo: SICE, 2004. v.3, p.2208–2213.
- PEREIRA, L. F. A. et al. Multiple resonant controllers for uninterruptible power supplies: a systematic robust control design approach. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, New York, v.61, n.3, p.1528–1538, 2014.
- PILLONETTO, G.; CHIUSO, A. Tuning complexity in regularized kernel-based regression and linear system identification: the robustness of the marginal likelihood estimator. **Automatica**, Tarrytown, v.58, p.106–117, 2015.
- PILLONETTO, G.; CHIUSO, A.; DE NICOLAO, G. Prediction error identification of linear systems: a nonparametric gaussian regression approach. **Automatica**, Tarrytown, v.47, n.2, p.291–305, 2011.
- PILLONETTO, G.; DE NICOLAO, G. A new kernel-based approach for linear system identification. **Automatica**, Tarrytown, v.46, n.1, p.81–93, 2010.
- PILLONETTO, G. et al. Kernel methods in system identification, machine learning and function estimation: a survey. **Automatica**, Tarrytown, v.50, n.3, p.657 – 682, 2014.
- PRANDO, G.; CHIUSO, A.; PILLONETTO, G. Maximum entropy vector kernels for MIMO system identification. **Automatica**, Tarrytown, v.79, p.326–339, 2017.
- PREVIDI, F. et al. Data-driven control design for neuroprostheses: a virtual reference feedback tuning (VRFT) approach. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, New York, v.12, n.1, p.176–182, 2004.
- RALLO, G. et al. Virtual reference feedback tuning with bayesian regularization. In: EUROPEAN CONTROL CONFERENCE, 2016, Aalborg. **Proceedings...** New York: IEEE, 2016. p.507–512.
- SCHEID FILHO, R. et al. Application of virtual reference feedback tuning to a non-minimum phase pilot plant. In: IEEE CONFERENCE ON CONTROL APPLICATIONS, 2016, Buenos Aires. **Anais...** New York: IEEE, 2016. p.1318–1323.

SIRISENA, H. R.; HANG, C. C.; VASNANI, V. U. Empirical tuning of a class of multivariable control systems. In: SINGAPORE INTERNATIONAL CONFERENCE ON INTELLIGENT CONTROL AND INSTRUMENTATION, 1992, Singapore. **Proceedings...** New York: IEEE, 1992. v.1, p.177–182.

SKOGESTAD, S. **Multivariable feedback control: analysis and design**. 2.ed. New Jersey: John Wiley & Sons, 2007. v.2.

SÖDERSTRÖM, T. **Errors-in-variables methods in system identification**. Amsterdam: Springer, 2018.

SÖDERSTRÖM, T.; STOICA, P. **System identification**. Englewoods Cliff: Prentice Hall, 1989.

TESCH, D.; ECKHARD, D.; BAZANELLA, A. S. Iterative feedback tuning for cascade systems. In: EUROPEAN CONTROL CONFERENCE, 2016, Aalborg. **Proceedings...** New York: IEEE, 2016. p.495–500.

TESCH, D.; ECKHARD, D.; GUARIENTI, W. C. Pitch and roll control of a quadcopter using cascade iterative feedback tuning. In: IFAC SYMPOSIUM ON TELEMATICS APPLICATIONS, 4., 2016, Porto Alegre. **Proceedings...** New York: IFAC, 2016. p.30–35.

VAN HEUSDEN, K.; KARIMI, A.; BONVIN, D. Data-driven model reference control with asymptotically guaranteed stability. **International Journal of Adaptive Control and Signal Processing**, New Jersey, v.25, n.4, p.331–351, 2011.

YUBAI, K.; USAMI, H.; HIRAI, J. Correlation-based direct tuning of MIMO controllers by least-squares and its application to tension-and-speed control apparatus. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON CONTROL, AUTOMATION AND SYSTEMS-SICE, 2009, Fukuoka. **Proceedings...** New York: IEEE, 2009. p.931–936.

ZHOU, K. et al. **Robust and Optimal Control**. New Jersey: Prentice Hall, 1996.

ZIEGLER, J. G.; NICHOLS, N. B. Optimum settings for automatic controllers. **Transactions of the ASME**, New York, v.64, n.11, p.759–768, 1942.

APÊNDICE A INTERPRETAÇÃO ESTOCÁSTICA DA IDENTIFICAÇÃO POR MQP

Aqui se apresenta a interpretação estocástica do procedimento de identificação, mostrando que resolver o problema por meio do método dos MQP é o mesmo que maximizar a função $f(Y|\theta)$ por meio da técnica de máxima verossimilhança. Para iniciar a análise, considere que se deseja identificar um sistema que possui um modelo FIR multivariável. Conforme fora visto na Seção 4.1, o modelo deste sistema pode ser descrito, em uma forma matricial, pela seguinte equação:

$$Y = \phi\theta + W, \quad (317)$$

lembrando que $\phi \in \mathbb{R}^{Nn \times n^2m}$ é uma matriz com os vetores regressores, conforme o apresentado nas equações (159) e (160) do Capítulo 4, $\theta \in \mathbb{R}^{n^2m}$ é o vetor de parâmetros (que nesta abordagem é considerado uma variável determinística) e $W \in \mathbb{R}^{Nn}$ é o ruído de saída do processo, que por sua vez é Gaussiano, possui média igual a zero, $E[W] = 0$ e covariância $E[WW^T] = \Sigma$.

Portanto, a partir do modelo apresentado acima para o sistema, é fácil perceber que sua saída também será uma variável aleatória com distribuição Gaussiana, tal que $Y \sim \mathcal{N}(\phi\theta, \Sigma)$. Dessa forma, a função densidade de probabilidade de Y será dada por:

$$f(Y|\theta) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{Nn}|\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2}(Y-\phi\theta)^T \Sigma^{-1}(Y-\phi\theta)}, \quad (318)$$

onde utiliza-se $f(Y|\theta)$ para denotar que está é a distribuição de Y dada a estrutura de modelos descrita em (317), que depende de θ .

Agora, busca-se estimar o vetor de parâmetros θ a partir de dados coletados no sistema por esta abordagem estocástica, usando a técnica de máxima verossimilhança:

$$\hat{\theta}_{ML} = \arg \max_{\theta} f(Y|\theta). \quad (319)$$

Conforme discutido anteriormente, para facilitar o problema, pode-se calcular o logaritmo de $f(Y|\theta)$, resultando em:

$$\hat{\theta}_{ML} = \arg \max_{\theta} \ln(f(Y|\theta)) \quad (320)$$

$$\ln(f(Y|\theta)) = \left[-\frac{(2\pi)^{Nn}}{2} - \frac{|\Sigma|}{2} - \frac{1}{2}(Y - \phi\theta)^T \Sigma^{-1}(Y - \phi\theta) \right]. \quad (321)$$

Nota-se que resolver o problema acima é equivalente a resolver

$$\hat{\theta}_{ML} = \arg \min_{\theta} (Y - \phi\theta)^T \Sigma^{-1}(Y - \phi\theta), \quad (322)$$

que é a estimativa de MQP quando a matriz de ponderação M é escolhida como $M = \Sigma^{-1}$.