Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Tratamento do fator de decaimento exponencial para o Modelo Diebold-Li no ajuste da ETTJ brasileira

Lucio D. Sartori[1]
Diego Eckhard[2]
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS

Resumo. O presente trabalho testa uma alternativa de ajuste da estrutura a termo da taxa de juros brasileira bem como a sua previsão através de uma variação do modelo Diebold-Li focando principalmente em seu fator de decaimento exponencial. No ajuste da curva, o encontro deste parâmetro é feito através de ferramenta computacional, buscando o fator de decaimento que reduz a diferença de mínimos quadrados em relação aos pontos originais capturados no mercado de juros futuro brasileiro em conjunto dos três outros fatores do modelo. A importância deste estudo reside em conhecer a aderência do modelo proposto à curva de juros brasileira testando sua eficiência quando utilizados os pressupostos enunciados.

Palavras-chave. ETTJ, Diebold e Li, Lambda variável, Curva de juros, Previsão

1 Introdução

A Estrutura a Termo da Taxa de Juros, doravante denominada simplesmente ETTJ, é a representação gráfica de uma função que tem por finalidade encontrar valores da taxa a prazo em função das suas taxas spot para quaisquer pontos de um intervalo de tempo, onde cada um destes pontos $i(t)$ diz respeito a uma determinada taxa de juro no tempo t os quais segundo [2] são objetos de alta dimensionalidade e que frequentemente não são diretamente observáveis. Na prática ela estabelece elos de ligação entre taxas já conhecidas ou, em uma visão mais ampla, faz a ligação entre as taxas de curto e de longo prazo. Seu entendimento é de grande valia tanto para os tomadores de decisão da política monetária quanto para acompanhamento do preço dos ativos a fim de buscar uma gestão mais eficiente dos investimentos.

Define-se um ponto relevante e dissonante entre autores para a definição da ETTJ a utilização do fator de decaimento λ da curva de juros. Existem divergências entre alguns especialistas acerca do tratamento desta variável. Os trabalhos [1,3] simplificaram os cálculos utilizando a variável de decaimento fixa, e justificando de que a manutenção desta constante não repercute em grandes alterações na mensuração dos outros parâmetros. O

[1]lucio.sartori@outlook.com
[2]diegoeck@ufrgs.br

trabalho [4] complementam o trabalho de Diebold-Li [1] estendendo o modelo Nelson Siegel Dinâmico tratando o parâmetro λ como um fator latente estocasticamente variável no tempo, inclusive assumindo que este modelo proposto gera não linearidades, que no caso específico são tratadas utilizando o filtro de Kalman. O autor enfatiza que manter λ fixo durante todo o período da amostra possa ser demasiado restritivo quando os dados se estendem por um longo período de tempo. Entende-se neste trabalho que a dinâmica e a volatilidade ocasionadas pelos riscos e incertezas inerentes à conjuntura econômica brasileira faz-se pertinente a utilização de um parâmetro de decaimento dinâmico no tempo. Para tal, foram analisadas as taxas de ganhos nominais dos Certificados de Depósito Interbancário de acordo com o fechamento diário da $BM\&F$ Bovespa compreendidos entre os anos de 2007 e 2013. A Figura 1 apresenta representação gráfica dos dados. Nesta Figura são apresentadas as taxas de juros de fechamento diário em seu valor equivalente anual, para cada uma das maturidades comercializadas naquele dia.

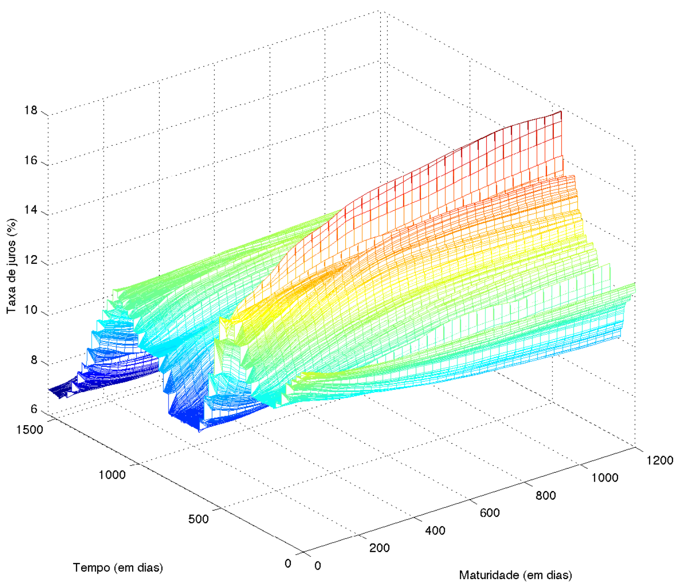

Figura 1: Representação gráfica da base de dados total, considerando suas três dimensões, Maturidade (em dias), Tempo (em dias) e a Taxa de Juros (%). As Taxas de Juros estão representadas em seu valor equivalente anual.

Este trabalho apresenta uma metodologia para estimar os parâmetros do modelo Diebold-Li incluindo o fator de decaimento da curva de juros. O ajuste dos parâmetros é realizado resolvendo um problema de otimização não convexo e os modelos obtidos são comparados com modelos com fator de decaimento fixo, demonstrando a superioridade do modelo proposto quando utilizado para descrever a ETTJ brasileira.

2 Modelo Diebold-Li

O proeminente estudo desenvolvido por Diebold-Li (DL) incorpora o modelo proposto por [5] utilizando seus componentes exponenciais para refinar a totalidade da curva de juros, período por período, parcimoniosamente. Estes três componentes inseridos no modelo passam a ser apresentados pelos autores como fatores de nível, inclinação e a curvatura da curva de juros no tempo. A formulação proposta por DL é dada por:

$$y(\tau, \lambda, \beta_0, \beta_1, \beta_2) = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} \right) + \beta_2 \left(\frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{\lambda\tau} \right) \tag{1}$$

DL interpretam os parâmetros do modelo da seguinte forma: o parâmetro τ representa a maturidade e é dado em dias. O parâmetro λ diz respeito à taxa exponencial de decaimento, é dizer que via de regra valores pequenos de λ refletem um decaimento suave e lento, causando uma boa aderência à curva para prazos mais longos, ao passo que valores altos de λ provocam um decaimento mais acelerado, ajustando-se melhor às taxas de curto prazo.

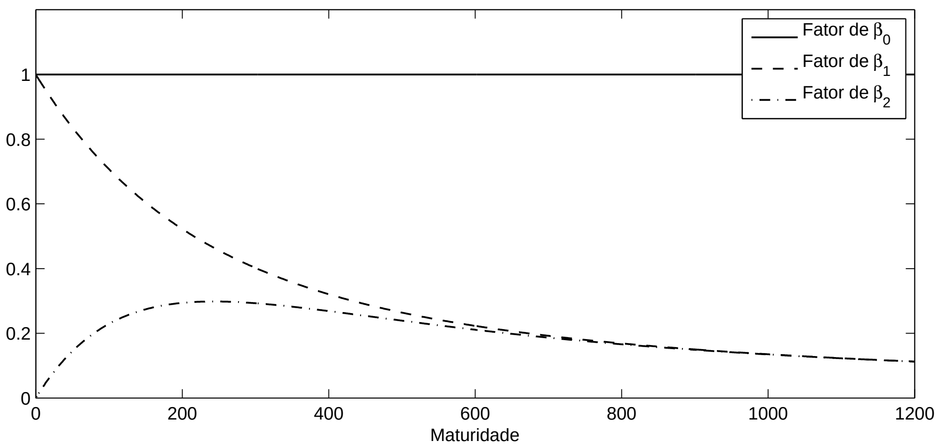

Figura 2: Representação gráfica de cada um dos *loadings* do modelo.

Os fatores β_0, β_1 e β_2 são interpretados como três fatores latentes dinâmicos. A carga de β_0 é igual a 1, uma constante que não tende à zero no limite, portanto pode ser vista como um fator de longo prazo. A carga de β_1 é igual a $\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau}$, uma função que inicia em 1, mas decai de modo direto e rápido para zero, podendo ser analisado como o fator de curto prazo. E por fim, o fator β_{2t} possui carga igual a $\left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau}\right)$ que inicia em zero, cresce, e após decai novamente a zero, pode ser visto como um fator de médio prazo. Estas cargas (*loadings*) podem ser vistas na Figura 2.

3 Ajuste da Curva de Juros

A definição da curva de juros a partir da dispersão dos pontos das taxas depende do encontro dos parâmetros λ, β_0, β_1, β_2 da equação (1) anteriormente descrita em função de cada conhecido vencimento τ. A fim de mensurar estes, é feita uma minimização do erro utilizando a diferença de mínimos quadrados buscando a melhor representação da curva em relação aos dados encontrados no mercado. Definiremos para o cálculo estes dados reais do mercado como sendo $T_x Ref(\tau)$.

Portanto

$$\min_{\lambda,\beta_0,\beta_1,\beta_2} J(\lambda, \beta_0, \beta_1, \beta_1) \tag{2}$$

Onde $J(\lambda, \beta_0, \beta_1, \beta_1)$ é a função objetivo:

$$J(\lambda, \beta_0, \beta_1, \beta_2) = \sum_{\tau=1}^{M_\tau} \{T_x Ref(\tau) - y(\tau, \lambda, \beta_0, \beta_1, \beta_2)\}^2 \tag{3}$$

Este procedimento responde pelo encontro dos parâmetros que melhor representam as taxas futuras do mercado em t. Porém, vemos que existe um problema de otimização a ser solucionado e para tal deve ser resolvido encontrando o mínimo global da função objetivo $J(\lambda, \beta_0, \beta_1, \beta_1)$. Portanto, será igualado a zero o gradiente da função.

$$\nabla J = 0 \tag{4}$$

Substituindo a equação (3) na equação (4) temos que o gradiente pode ser expresso por:

$$\nabla J = -2 \sum_{\tau=1}^{M_\tau} \{T_x Ref(\tau) - y(\tau, \lambda, \beta_0, \beta_1, \beta_2)\} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \beta_0} \\ \frac{\partial y}{\partial \beta_1} \\ \frac{\partial y}{\partial \beta_2} \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda} \end{bmatrix} = 0 \tag{5}$$

Onde as derivadas parciais são dadas por:

$$\frac{\partial y}{\partial \beta_0} = 1 \tag{6}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \beta_1} = \frac{e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} \tag{7}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \beta_2} = \frac{e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau} \tag{8}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} = \frac{(\beta_1 + \beta_2)\lambda e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - \frac{(\beta_1 + \beta_2)(1 - e^{-\lambda\tau})}{(\lambda\tau)^2} + \beta_2 \tau e^{-\lambda\tau} \tag{9}$$

Observa-se que a função objetivo $J(\lambda, \beta_0, \beta_1, \beta_1)$ não é convexa, como pode ser visto na Figura 3, portanto o sistema de equações ∇J é um sistema de equações não lineares, o que traz implicações não triviais aos cálculos. Entretanto, a partir do momento em que é definido um valor para o fator de decaimento λ, $J(\lambda, \beta_0, \beta_1, \beta_1)$ passa a torna-se uma função convexa, e portanto, o sistema de equações ∇J retorna um sistema de equações lineares com solução única. Neste momento então define-se o encontro de λ para que seja efetuada a resolução desta equação.

4 Parâmetro λ no ajuste da curva

Como já citado na introdução, alguns autores preferem optar pela utilização de valores fixos para o fator de decaimento, que é definido de forma que o valor máximo da curvatura coincida com o máximo da carga do prazo médio.

Intentando testar o λ como um parâmetro que varia para cada instante t já no ajuste da curva, deve-se resolver o problema de otimização causado por esta estratégia. O propósito aqui é que seja feito um processo de busca linear encontrando o melhor lambda possível para cada período. Na prática é escolhido um λ dentro de um intervalo pré-definido donde encaixam-se a grande maioria dos λ ótimos - definidos assim pelo seu melhor ajuste à curva - a fim de que seja possível calcular os outros três fatores da equação de uma forma mais simples, sendo o menor valor λ da função objetivo $J(\lambda, \beta_0, \beta_1, \beta_2)$ o que traz o melhor ajuste da curva de juros em t.

Tendo um parâmetro para o λ, o problema de otimização pode ser resolvido então em duas etapas, sendo que a resolução de cada uma ocorre de forma separada.

$$\min_{\lambda} \min_{\beta_0,\beta_1,\beta_2} J(\lambda, \beta_0, \beta_1, \beta_2) \tag{10}$$

Observa-se que o problema de otimização interno é quadrático podendo ser resolvido utilizando o método de mínimos quadráticos. Já o problema de otimização externo, não é convexo, mas torna-se de mais fácil resolução por envolver apenas uma variável, o parâmetro λ, como pode ser visto na Figura 3.

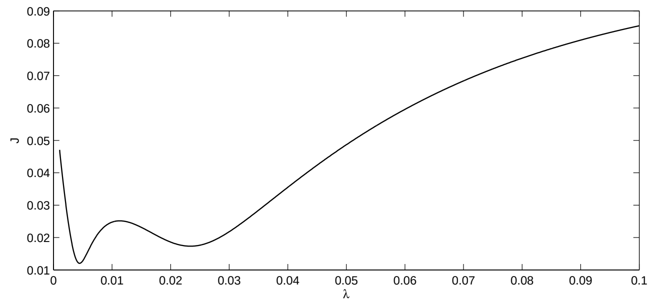

Figura 3: Função objetivo não convexa. Gráfico da função em relação a λ, considerando β_0, β_1 e β_2 ótimos para cada valor de λ.

5 Resultado do Ajuste da ETTJ

Para medir os resultados encontrados, dada a implementação do λ ao modelo proposto, foi utilizado como parâmetro de comparação, além dos dados reais de mercado o fator de

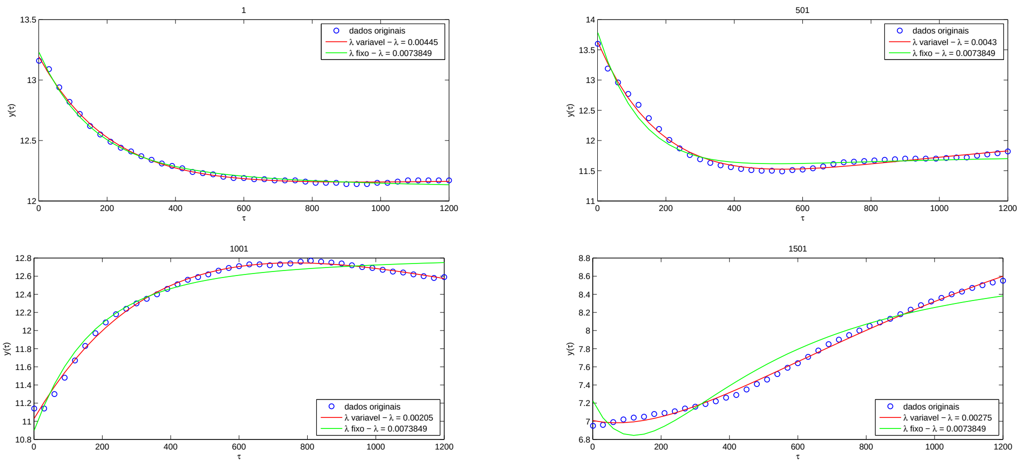

Figura 4: Ajuste da curva de juros.

Tabela 1: Diferença em mínimos quadrados entre as curvas de ajuste e os dados reais do mercado

T	J (λ variável)	J (λ fixo)
1	0,012038211	0,020612226
501	0,043236543	0,091480637
1001	0,031889084	0,086283875
1501	0,030346117	0,124926250

decaimento exponencial de λ fixo proposto por [6] que foi medido para a ETTJ brasileira partindo também das amostragens de DI Futuro.

Os resultados encontrados no ajuste da curva utilizando o fator de decaimento variável nos moldes apresentados são encorajadores. De fato, o que se percebe é que a variabilidade de λ provoca uma maximização nos resultados do ajuste da curva em relação à utilização desta variável estática, e é constatado que ele possui importância a ponto de permitir este relativo aumento na complexidade dos cálculos. Como resultado foi obtida uma redução generalizada do distanciamento da curva para a totalidade dos pontos de vencimento das taxas de juros no mercado Futuro de DI brasileiro em relação à utilização do λ fixo no decorrer de t. Constatamos esta afirmativa visualizando graficamente a curva nos dias $t = 1$, $t = 501$, $t = 1001$ e $t = 1501$, na Figura 4.

Por fim, a fim de expressar numericamente a comparação, mensura-se novamente estas quatro curvas já demonstradas graficamente em forma de tabela. A verificação é semelhante, demonstrando qual dos dois modos de tratamento (fixo ou variável) reduz a diferença média em mínimos quadrados entre a curva estimada e os juros pertinentes à base de dados em seus respectivos vencimentos.

6 Conclusões

As taxas de juros brasileiras sofrem uma considerável oscilação ao longo da sua maturidade devido à incerteza e expectativa dos agentes econômicos os quais transacionam ativos com rendimentos derivados destas. De fato, este trabalho demonstra sua relevância quanto à alteração do tratamento da variável λ, pois consegue capturar estas oscilações nos intervalos de maturidades das taxas de juros futuras com uma eficiência superior às amostras oriundas de modelos dotados de um fator de decaimento exponencial fixo.

Referências

[1] F. X. Diebold and C. Li. Forecasting the term structure of government bond yelds. *Journal of Econometrics*, 130(2):337–364, 2006.

[2] J. F. Caldeira. Estrutura a termo da taxa de juros no brasil: Observada e ajustada. *Análise Econômica*, 29(55):95–122, 2011.

[3] F. X. Diebold, S. Rudebush, and S. Arouba. The macroeconomy and the yeld curve: a dynamic latent factor approach. *Journal of Econometrics*, 131(1–2):309–338, 2006.

[4] J. F. Caldeira. Analyzing the term structure of interest rates using the dynamic nelson-siegel model with time-varying parameters. *Journal of Business and Economic Statistics,*, 28(3):329–343, 2010.

[5] C. R. Nelson and A. F. Siegel. Parcimonious modelling of yeld curves. *The Journal of Business*, 60(4):473–489, 1987.

[6] C. Almeida, R. Gomes, A. Leite, and J. Vicente. Movimentos da estrutura a termo e critérios de minimização do erro de previsão em um modelo paramétrico exponencial. *Revista Brasileira de Economia FGV*, 62(4):497–510, 2008.